Compito del 12 - 2 - 2025

1. Mediante fattorizzazione LU si risolva il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\alpha \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dove α è un parametro reale. Discutere l'esistenza delle soluzioni al variare di α.

Si ha:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha-3 \\ 0 & 0 & 3-\alpha \end{pmatrix}$$

Si risolve prima il sistema $L\vec{y} = (1, 1, -1)$, il quale fornisce $\vec{y} = (1, 0, 0)$. Se $\alpha \neq 3$, il sistema $U\vec{x} = \vec{y}$ ammette l'unica soluzione $\vec{x} = (1, 0, 0)$. Se $\alpha = 3$, ci sono infinite soluzioni del tipo: $\vec{x} = (1 + 2a, 0, a)$, con a parametro reale.

2. Dato l'intero $n \geq 1$, si considerino le curve al variare di n:

$$\vec{\gamma}(t) = (t, t^n) \qquad t \in [0, 1]$$

Si calcoli il lavoro $\mathcal{L}_n$ lungo $\vec{\gamma}$ relativamente al campo:

$$\vec{F}(x, y) = (y, x^2)$$

e si valuti: $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}_n$.

Si ha $\vec{\gamma}'(t) = (1, nt^{n-1})$, e quindi:

$$\mathcal{L}_n = \int_0^1 \Big(t^n + nt^{n+1}\Big)dt = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+2}$$

Se ne deduce poi che $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}_n = 1$.

3. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 2e^{3t}$$

con le condizioni $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Il polinomio caratteristico fornisce le due radici: 1 e 2. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea risulta essere: $c_1 e^t +$

c_2e^{2t} con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. A questa va aggiunta una soluzione dell'equazione non omogenea, cercando ad esempio fra quelle della forma ae^{3t}, $a \in \mathbf{R}$. L'unica scelta compatibile porta ad $a = 1$. Pertanto la soluzione generale viene ad essere: $c_1e^t + c_2e^{2t} + e^{3t}$. Imponendo le condizioni per $t = 0$ si ha infine $c_1 = c_2 = 0$, e dunque: $y(t) = e^{3t}$.

4. Sia $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, 16 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}$. Calcolare l'integrale:

$$I = \int_D (x^2 + y^2) \cos\left[(x^2 + y^2)^2\right] \, dxdy$$

Ragionando in coordinate polari si ha:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_4^5 \rho^3 \ \cos \rho^4 \ d\rho \right) d\theta = \frac{2\pi}{4} \left[\sin \rho^4 \right]_4^5 =$$

$$= \frac{\pi}{2} (\sin 625 - \sin 256).$$