Compito del 11 - 2 - 2025

1. Sia $f :]-1, 2[- \{0, 1\} \to B$, definita come:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{se } x \in]-1, 1[- \{0\} \qquad\qquad f(x) = 1 \quad \text{se } x \in]1, 2[$$

Trovare l'immagine di f e dedurre (se esistono) le quantità: $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Posto che B sia l'immagine di f dire se la funzione è invertibile.

L'immagine è $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$, per cui $\sup(f)$=$+\infty$, $\inf(f)$=$-\infty$, mentre $\max(f)$ e $\min(f)$ non esistono. La funzione è continua e derivabile in tutto il dominio. Quando B è l'immagine di f la funzione non risulta comunque essere invertibile in quanto non iniettiva.

2. Disegnare il grafico della funzione $f :]-\infty, 0] \to \mathbf{R}$ data da:

$$f(x) \ = \sqrt{1 - e^x}$$

Determinare l'immagine di f.

Si ha $f(0) = 0$ e:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

Inoltre, per $x \neq 0$, si ricava:

$$f'(x) = -\frac{e^x}{2\sqrt{1 - e^x}} < 0 \qquad\qquad f''(x) = -\frac{e^x(2 - e^x)}{4(1 - e^x)^{3/2}} < 0$$

La funzione è positiva, decrescente e concava. L'immagine è $[0, 1[$, per cui il valore minimo assunto è 0, mentre non vi è massimo.

3. Determinare l'espressione analitica di $G : [1/e, 2] \to \mathbf{R}$ data da:

$$G(t) = \int_{1/e}^{t} f(x) \ dx$$

dove f è definita nell'esercizio **1**. Si calcoli successivamente l'immagine di G.

Se $t \in [1/e, 1]$ si ha:

$$G(t) = \int_{1/e}^{t} \frac{dx}{x} = \log t + 1$$

ottenendo $G(1) = 1$. Se $t \in [1, 2]$ si ha:

$$G(t) = G(1) + \int_{1}^{t} dx = t$$

ottenendo $G(2) = 2$. L'immagine di G viene dunque ad essere $[0, 2]$, in quanto G è crescente e $G(0) = 0$.

4. Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che la soluzione del seguente sistema lineare corrisponda a $x = 0$:

$$\begin{cases} 3ix - y + iz = 2 \\ 3ix + 3iz = \alpha \\ 6ix + 2iz = 2 \end{cases}$$

dove i è l'unità immaginaria.

Sostituendo direttamente $x = 0$ nel sistema, le ultime due equazioni diventano: $3iz = \alpha$ e $2iz = 2$, le quali sono compatibili solo con le scelte $\alpha = 3$ e $z = -i$. Dalla prima equazione si deduce infine che $y = -1$.