Compito del 9 - 1 - 2025

1. Mediante fattorizzazione LU risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ dove $\vec{b} = (-1, 2, 5)$ e:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolare il determinante della matrice.

Per poter procedere occorre scambiare la prima con la seconda riga. Fatto ciò, la nuova matrice si fattorizza nel seguente modo:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Si ricava infine: $\vec{x} = (1, -1, 2)$, tenendo presente che nel vettore $\vec{b}$ vanno preventivamente scambiate fra loro la prima e la seconda componente. Il determinante di A è pari a -16. Si noti che il prodotto dei determinanti di L e U è $1 \cdot 16 = 16$. Il cambiamento di segno è dovuto alla permutazione effettuata.

2. Siano date la curve:

$$\vec{\gamma}(t) = (0,\ -2\sin t,\ 2\cos t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{\delta}(t) = (\sin t,\ \cos t,\ 0) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e il campo $\vec{F}(x, y, z) = (0, -z, y)$. Calcolare il lavoro lungo ciascuna di esse.

Le due curve sono chiuse. Tuttavia il campo non è conservativo per cui non è detto che il lavoro sia il medesimo. Infatti, si ha:

$$\vec{\gamma}\,'(t) = (0, -2\cos t, -2\sin t) \qquad \vec{\delta}\,'(t) = (\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\gamma}} = \int_0^{2\pi} 4(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 8\pi$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\delta}} = \int_0^{2\pi} 0\ dt = 0.$$

Nel secondo caso il lavoro è nullo perché il campo è ortogonale al vettore tangente alla curva.

3. Trovare la soluzione generale del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = 6y(t) + 2z(t) \\ \\ z'(t) = 2y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

Calcolare poi: $L_1 = \lim_{t\to-\infty} y(t)$ e $L_2 = \lim_{t\to+\infty} z(t)$.

Si considera:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono 2 e 7. Gli autovettori corrispondenti sono: $(a, -2a)$, $(2b, b)$, con a e b costanti arbitrarie. La soluzione generale del sistema differenziale è dunque:

$y(t) = ae^{2t} + 2be^{7t}$ $\qquad\qquad$ $z(t) = -2ae^{2t} + be^{7t}$.

Per quanto riguarda il primo limite si ottiene: $L_1 = 0$. Il secondo limite dipende da a e b. Si hanno i casi: $L_2 = 0$ se $a = b = 0$, $L_2 = +\infty$ se $b > 0$, $L_2 = -\infty$ se $b < 0$, $L_2 = +\infty$ se $b = 0$ e $a < 0$, $L_2 = -\infty$ se $b = 0$ e $a > 0$.

4. Sia:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x > 0, y > 0,\ x^2 + 4y^2 \leq 4\right\}$$

Calcolare i volumi dei due solidi ottenuti facendo ruotare D sia attorno all'asse x che attorno all'asse y.

In entrambi i casi si ottiene la metà di un ellissoide. Nel caso della rotazione attorno ad x si ha:

$$\pi \int_0^2 \frac{4 - x^2}{4}\ dx = \tfrac{1}{4}\pi \left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \tfrac{4}{3}\pi$$

Per quello della rotazione attorno ad y si ha:

$$\pi \int_0^1 4(1 - y^2)\ dy = 4\pi \left[y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \tfrac{8}{3}\pi.$$