Compito del 8 - 1 - 2025

1. Sia $f :]-1, +\infty[\to \mathbf{R}$, definita come:

$$f(x) = 1 - x \quad \text{se } x \in]-1, 0] \qquad f(x) = e^{-x} \quad \text{se } x \in]0, +\infty[$$

Trovare l'immagine di f e dedurre (se esistono) le quantità: $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è suriettiva, iniettiva, invertibile.

L'immagine è $]0, 2[$, per cui $\sup(f)$=2 e $\max(f)$ non esiste. Inoltre $\inf(f)$=0, mentre $\min(f)$ non esiste. La funzione è continua e derivabile in tutto il dominio. La f non risulta essere invertibile in quanto, pur essendo iniettiva, non è suriettiva.

2. Disegnare il grafico della funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ data da:

$$f(x) \; = \; x^2(\log x - 1)$$

Determinare l'immagine di f.

La funzione è continua e derivabile infinite volte in tutto il dominio. Si annulla per $x = e$. Inoltre:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = x(2 \log x - 1) \qquad f''(x) = 2 \log x + 1$$

La funzione assume valore minimo pari a $-e/2$ per $x = e^{1/2}$ e presenta un flesso con pendenza negativa per $x = e^{-1/2}$. L'immagine viene ad essere $[-e/2, +\infty[$.

3. Determinare l'espressione analitica di $G :]-1, +\infty[\to \mathbf{R}$ data da:

$$G(t) = \int_{-1}^{t} f(x) dx$$

dove f è definita nell'esercizio **1**. Si calcolino successivamente i limiti:

$$\lim_{t \to +\infty} G(t) \qquad \lim_{t \to +\infty} e^t G(t) \qquad \lim_{t \to +\infty} e^{-t} G(t)$$

Se $t \in]-1,0]$ si ricava:

$$G(t) = \int_{-1}^{t} (1-x)dx = \Big[x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{t} = t - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{3}{2}$$

da cui $G(0) = 3/2$. Se invece $t > 0$ si ricava:

$$G(t) = G(0) + \int_{0}^{t} e^{-x}dx = \tfrac{5}{2} - e^{-t}$$

Per quanto riguarda i limiti si ha:

$$\lim_{t\to+\infty} G(t) = \tfrac{5}{2} \qquad \lim_{t\to+\infty} e^{t}G(t) = +\infty \qquad \lim_{t\to+\infty} e^{-t}G(t) = 0.$$

4. Tramite il metodo di eliminazione Gaussiana discutere l'eventuale esistenza di soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} 3ix - y + iz = 1 \\ 3ix + 3iz = \alpha \\ 6ix + 6iz = 1 \end{cases}$$

dove i è l'unità immaginaria.

Dopo avere effettuato la triangolazione si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3i & -1 & i & 1 \\ 0 & 1 & 2i & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\alpha \end{array}\right)$$

Se $\alpha \neq 1/2$ il sistema non ammette soluzioni. Se $\alpha = 1/2$ esistono infinite soluzioni. Assumendo $z = \gamma \in \mathbf{R}$ come parametro, queste prendono la forma:

$$(x, y, z) = \Big(-\tfrac{1}{6}i - \gamma, \quad -\tfrac{1}{2} - 2i\gamma, \quad \gamma \Big).$$