Compito del 22 - 1 - 2025

1. Calcolare gli autovalori e il determinante della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mediante fattorizzazione LU risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ dove $\vec{b} = (2, 3, 3)$.

Gli autovalori sono: 0 e 2 (il secondo ha doppia molteplicità). Il primo corrisponde ad autovettori del tipo $a(0, 1, -1)$, $a \in \mathbf{R}$. Il secondo porta ad autovettori sia del tipo $b(1, 0, 0)$ che del tipo $c(0, 1, 1)$, con $b, c \in \mathbf{R}$. Ne consegue che il determinante è nullo. La matrice si fattorizza come segue:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Risolvendo $L\vec{y} = \vec{b}$ si ricava $\vec{y} = (2, 3, 0)$. Risolvendo $U\vec{x} = \vec{y}$ si ricavano infinite soluzioni del tipo $\vec{y} = (1, 3 - \gamma, \gamma)$ con $\gamma \in \mathbf{R}$.

2. Sia data la curva:

$$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) = \left(1 + \mathrm{tg}(\tfrac{1}{4}\pi t),\ te^{\cos[\pi(t+1)]}\right) \quad t \in [0, 1]$$

immersa nel campo $\vec{F}(x, y) = (3x^2 + \cos y,\ -x \sin y)$. Calcolare il lavoro $\mathcal{L}$ corrispondente.

Il campo ammette potenziale $P(x, y) = x^3 + x \cos y$, per cui:

$$\mathcal{L} = P(x(1), y(1)) - P(x(0), y(0)) =$$

$$= P(2, e) - P(1, 0) = 6 + 2 \cos e.$$

3. Per $t \geq 0$, trovare la soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'(t) = \frac{2}{y(t) + 1}$$

con la condizione $y(0) = 1$.

L'equazione è a variabili separabili e si ha:

$$\int y'(t)(y(t)+1)dt = \int 2dt + c = 2t + c$$

dove c è una costante arbitraria. Proseguendo nei conti si ricava:

$$\tfrac{1}{2}y^2(t) + y(t) = 2t + c \quad \Rightarrow \quad y^2(t) + 2y(t) - 2(2t+c) = 0$$

Sfruttando la condizione iniziale si ottiene $c = 3/2$. Si risolve infine l'equazione di secondo grado, ricavando:

$$y(t) = -1 \pm 2\sqrt{1+t}$$

Affinché $y(0)$ valga 1, l'unica soluzione accettabile delle due proposte è quella con il segno $+$.

4. Sia D il quarto di cerchio di centro l'origine e raggio 2 posto nel primo quadrante. Calcolare:

$$I = \int_D x^2 y \; dxdy$$

Svolgendo il conto in coordinate polari si ottiene:

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\pi/2} \rho^4 (\cos\theta)^2 \sin\theta \; d\theta \right) \rho d\rho \;\; = -\tfrac{1}{3}\Big[(\cos\theta)^3\Big]_0^{\pi/2} \; \tfrac{1}{5}[\rho^5]_0^2 = \tfrac{32}{15}.$$