Compito del 21 - 1 - 2025

1. Sia $f : [0, 1[\to B$, definita come:

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1} \quad \text{se } x \in]0,1[\qquad\qquad f(0) = \frac{e}{2}$$

Trovare l'immagine di f e dedurre (se esistono) le quantità: $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Posto che B sia l'immagine di f dire se la funzione è invertibile.

L'immagine è $]1, e/2]$, per cui $\sup(f)$=$\max(f)$=$e/2$, $\inf(f)$=1, mentre $\min(f)$ non esiste. La funzione è continua e derivabile in tutto il dominio tranne che per $x = 0$. Quando B è l'immagine di f la funzione risulta essere invertibile.

2. Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbf{R} - \{-5\} \to \mathbf{R}$ data da:

$$f(x) \;=\; \frac{x^2 - 16}{x+5}$$

Determinare l'immagine di f.

La funzione è continua e derivabile infinite volte in tutto il dominio. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Il limite per x tendente a -5 non esiste. Tuttavia si possono calcolare:

$$\lim_{x\to-5^-} f(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{x\to-5^+} f(x) = +\infty$$

Inoltre:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 10x + 16}{(x+5)^2} \qquad\qquad f''(x) = \frac{18}{(x+5)^3}$$

La funzione presenta un valore di massimo relativo pari a -16 quando $x = -8$, presenta un valore di minimo relativo pari a -4 quando $x = -2$. Essa tuttavia non ammette massimo o minimo in quanto l'immagine è $]-\infty, -16] \cup [-4, +\infty[$. Non ci sono punti di flesso. La funzione è concava per $x < -5$, convessa per $x > -5$.

3. Determinare l'espressione analitica di $G : [0,1] \to \mathbf{R}$ data da:

$$G(t) = \int_0^t (x+1)^2 f(x)\ dx$$

dove f è definita nell'esercizio **1**. Si calcoli successivamente l'immagine di G.

Mediante integrazione per parti, si ricava:

$$G(t) = \int_0^t (x+1)e^x\ dx = te^t$$

L'immagine di G viene dunque ad essere $[0,e]$.

4. Tramite il metodo di eliminazione Gaussiana discutere l'eventuale esistenza di soluzioni del seguente sistema lineare al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} 3ix - y + iz = 1 \\ 3ix + 3iz = \alpha \\ 6ix + 2iz = 2 \end{cases}$$

dove i è l'unità immaginaria.

Dopo avere effettuato la triangolazione si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3i & -1 & i & 1 \\ 0 & 1 & 2i & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & -4i & 2(1-\alpha) \end{array}\right)$$

Per ogni α esiste una sola soluzione del sistema data da:

$$(x,y,z) = \Big((\tfrac{1}{6}\alpha - \tfrac{1}{2})i,\ 0,\ \tfrac{1}{2}(1-\alpha)i \Big).$$