Prova parziale del 4 - 11 - 2024

1. Sia assegnato il parametro reale $\alpha \in \mathbf{R}$ e la funzione $f : A = [-1, 1[\to B$ (con $B \subset \mathbf{R}$) in modo che:

$$f(x) = \alpha + \frac{1}{x^2} - 1 \quad \text{se} \;\; x \in [-1, 0[; \qquad f(x) = \alpha x \quad \text{se} \;\; x \in [0, 1[$$

Al variare di α, trovare l'immagine Im(f) e (se esistono): sup(f), inf(f), max(f), min(f). Dire in che punti di A la f è continua e/o derivabile. Posto B=Im(f) dire per quali α la funzioneè invertibile. Nei casi in cui la funzione inversa esista, fornire la sua espressione.

Se $\alpha > 0$, si ha Im(f)=$[0, +\infty[$ da cui si ricava inf(f)=min(f)=0 e sup(f)=$+\infty$ (il massimo non esiste). La funzione è continua e derivabile in $A-\{0\}$. Con B=Im(f) la funzione risulta essere invertibile e si ha:

$$f^{-1}(y) = \frac{-1}{\sqrt{y - \alpha + 1}} \;\; \text{se} \;\; y \in [\alpha, +\infty[; \;\; f^{-1}(y) = y/\alpha \;\; \text{se} \;\; y \in [0, \alpha[.$$

Se $\alpha \leq 0$, si ha Im(f)=$[\alpha, +\infty[$ da cui si ricava inf(f)=min(f)=α e sup(f)=$+\infty$ (il massimo non esiste). La funzione è continua e derivabile in $A - \{0\}$. La funzione non è iniettiva per cui non è invertibile.

2. Disegnare il grafico della funzione $f :]0, \frac{1}{2}\pi] \to B \subset \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

Determinare l'immagine di f. E' possibile prolungare f a $[0, \frac{1}{2}\pi]$ in modo che la nuova funzione risultante sia continua?
Nel caso in cui B coincida con l'immagine verificare che f è invertibile e calcolarne l'inversa.

La f è continua e derivabile in tutto in tutto il dominio. Si ha:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty, \;\; f'(x) = \frac{-1}{1 - \cos x} < 0, \;\; f''(x) = \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2} > 0$$

Dunque, f non è limitata superiormente, è strettamente decrescente e convessa. L'immagine risulta essere $[1,+\infty[$, dove $f(\pi/2) = 1$ rappresenta il valore minimo. Non è possibile assegnare un valore a f nel punto $x = 0$ mantenedo la continuità.
Posto $B = [1,+\infty[$, la f risulta essere invertibile in quanto strettamente decrescente (iniettiva). Per $y \in B$, posto $z = \cos x$ $(z \neq 1)$, si ha:

$$\frac{\sin x}{1-\cos x} = y \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-z^2} = y(1-z)$$
$$\Rightarrow \quad (y^2+1)z^2 - 2y^2 z + (y^2-1) = 0$$

da cui:

$$z = \frac{y^2-1}{y^2+1} \quad \Rightarrow \quad x = \arccos\left(\frac{y^2-1}{y^2+1}\right).$$