**Compito del 21 - 2 - 2024**

**1.** Calcolare gli autovalori e il determinante della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Mediante fattorizzazione $LU$ risolvere il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ dove $\vec{b} = (4, -2, 7)$.

---

Gli autovalori sono: 3,4,5. Il loro prodotto, pari a 60, fornisce il determinante. La matrice si fattorizza nel seguente modo:

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

ricavando infine: $\vec{x} = (1, -1, 2)$.

**2.** Siano date la curve:

$$\vec{\gamma}_A(t) = \Big(\cos(\pi t/2),\ \sin(\pi t/2)\Big) \qquad t \in [0,1]$$

$$\vec{\gamma}_B(t) = (1-t,\ t) \qquad t \in [0,1]$$

e il campo $\vec{F}(x,y) = (-y, x)$. Lungo quale di esse il lavoro risulta maggiore?

---

Le due curve congiungono il punto $(1,0)$ con il punto $(0,1)$. Tuttavia il campo non è conservativo per cui non è detto che il lavoro sia lo stesso. Infatti, si ha:

$$\vec{\gamma}_A'(t) = (\pi/2)\Big(-\sin(\pi t/2),\ \cos(\pi t/2)\Big) \qquad \vec{\gamma}_B'(t) = (-1, 1)$$

$$\mathcal{L}_A = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \Big(\sin^2(\pi t/2) + \cos^2(\pi t/2)\Big)dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\mathcal{L}_B = \int_0^1 1\ dt = 1.$$

Pertanto si ha lavoro maggiore nel primo caso.

**3.** Trovare le soluzioni del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = 6y(t) + 2z(t) \\ \\ z'(t) = 2y(t) + 3z(t) \end{cases}.$$

Determinare quella soddisfacente $y(0) = 4$ e $z(0) = 2$.

---

Si considera:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di $A$ sono 2 e 7. Gli autovettori corrispondenti sono: $(a, -2a)$, $(2b, b)$, con $a$ e $b$ arbitrari. La soluzione generale del sistema differenziale è dunque:

$y(t) = ae^{2t} + 2be^{7t}$ $\qquad$ $z(t) = -2ae^{2t} + be^{7t}$.

Imponendo le condizioni per $t = 0$ si deduce che $a = 0$ e $b = 2$, da cui: $y(t) = 4e^{7t}, z(t) = 2e^{7t}$.

**4.** Sia:

$$D = \Big\{0 \le x \le 1,\ 1 - x^2 \le y \le 1\Big\}$$

Calcolare l'area $A$ di $D$ e l'integrale:

$$I = \int_D y\ dxdy.$$

---

Per quanto riguarda l'area si ha:

$$A = \int_0^1 \left( \int_{1-x^2}^1 dy \right) dx = \int_0^1 x^2\ dx = \tfrac{1}{3}$$

mentre l'integrale risulta essere:

$$I = \int_0^1 \left( \int_{1-x^2}^1 y\ dy \right) dx = \tfrac{1}{2} \int_0^1 [1 - (1 - x^2)^2]\ dx = \tfrac{7}{30}.$$