**Compito del 20 - 2 - 2024**

**1.** Sia $f : [-1, 0[\cup]0, 1] \to \mathbf{R}$, definita come:

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{se } x \in [-1, 0[ \qquad f(x) = 1/x \quad \text{se } x \in ]0, 1]$$

Trovare l'immagine di $f$ e dedurre (se esistono) le quantità: $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Dire in che punti $f$ è continua e/o derivabile. Dire se $f$ è suriettiva, iniettiva, invertibile.

---

L'immagine è $]-1, 0] \cup [1, +\infty[$, per cui $\sup(f)$=$+\infty$ e $\max(f)$ non esiste. Inoltre $\inf(f)$=$-1$, mentre $\min(f)$ non esiste. La funzione è continua e derivabile su tutto il dominio. La $f$ non risulta essere invertibile in quanto è iniettiva ma non suriettiva.

**2.** Disegnare il grafico della funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ data da:

$$f(x) \; = \; e^{2x} - e^{4x}$$

Determinare l'immagine di $f$.

---

La funzione è continua e derivabile infinite volte in tutto il dominio. Si annulla per $x = 0$ e la derivata prima $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^{4x}$ si annulla quando $x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2})$, dove $f$ assume valore massimo pari a $\frac{1}{4}$. Inoltre:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

L'immagine risulta essere $]-\infty, \frac{1}{4}]$.

**3.** Si tracci un grafico qualitativo della funzione $G : [0, 1] \to \mathbf{R}$ data da:

$$G(t) = \int_0^t \frac{e^x}{x+1} dx \qquad t \in [0, 1].$$

---

Si ha:

$$G(0) = 0 \qquad G'(t) = \frac{e^t}{t+1} > 0 \qquad G''(t) = \frac{te^t}{(t+1)^2} \geq 0$$

per cui $G$ è strettamente positiva, crescente e covessa.

**4.** Mettere il seguente sistema in forma triangolare e, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, discutere l'eventuale esistenza di soluzioni:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 2z = 1 \\ 2y + 4z = \alpha \end{cases}$$

---

Si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array}\right)$$

Se $\alpha \neq 1$ il sistema è impossibile. Se $\alpha = 1$, esistono infinite soluzioni. Assumendo $z = \gamma \in \mathbf{R}$ come parametro queste hanno la forma:

$$(x, y, z) = \left(\tfrac{1}{2} - \gamma,\ \tfrac{1}{2} - 2\gamma,\ \gamma\right).$$