**Compito del 12 - 1 - 2021**

**1.** Data $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, come $g(x) = 1+(x+1)^4$, sia $r$ la retta tangente a $g$ nel punto $x = 0$. Si definisce poi $f : [-2, 2[\to \mathbf{R}$ nel seguente modo:

$$f(x) = g(x) \quad \text{se } x \in [-2, 0] \qquad\qquad f(x) = r(x) \quad \text{se } x \in ]0, 2[$$

Trovare (se esistono): $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Trovare l'immagine di $f$. Dire in che punti $f$ è continua e/o derivabile. Dire se $f$ è invertibile.

---

Intanto si ricava che $r(x) = 4x + 2$. Si ha poi: $\inf(f) = \min(f) = 1$ e $\sup(f) = 8$. Il massimo non esiste. La funzione è continua e derivabile su tutto il dominio. L'immagine di $f$ consiste nell'insieme $B = [1, 8[$. Anche assumendo che il codominio di $f$ sia $B$, la funzione non è invertibile, non essendo essa iniettiva.

**2.** Sull'intervallo $A = [0, \sqrt{\frac{1}{2}\pi}]$, disegnare il grafico della funzione $f : A \to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = \mathrm{tg}(x^2) \quad \text{se } x \neq \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} \qquad\qquad f(\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}) = 0$$

Determinare l'immagine $B$ di $f$. Dire se la nuova funzione $f : A \to B$ risulta essere invertibile.

---

La funzione tende a $+\infty$ quando $x \to \sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ (da sinistra). Essa non è dunque continua in $\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$. Nei punti in cui si possono calcolare le derivate si ha:

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos(x^2)} \qquad\qquad f''(x) = \frac{2\cos(x^2) + 4x^2 \sin(x^2)}{(\cos(x^2))^2}$$

Entrambe tali derivate sono positive, per cui la funzione è crescente e convessa sull'intervallo $[0, \sqrt{\frac{1}{2}\pi}[$. L'immagine è la semiretta $B = [0, +\infty[$. La funzione non è invertibile non essendo essa iniettiva, dato che $f(0) = f(\sqrt{\frac{1}{2}\pi}) = 0$.

**3.** Rappresentare analiticamente la funzione integrale:

$$G(t) = \int_{-2}^{t} f(x)dx \qquad\qquad t \in [-2, 2]$$

dove $f$ è definita nell'esercizio **1**.

---

Per $-2 \leq t \leq 0$, si ha:

$$G(t) = \int_{-2}^{t} \Big[1 + (x+1)^2\Big] dx = \left[x + \frac{(x+1)^5}{5}\right]_{-2}^{t} = t + \frac{(t+1)^5}{5} + \frac{9}{5}$$

In particolare: $G(0) = 2$. Per $0 \leq t \leq 2$, si ha invece:

$$G(t) = G(0) + \int_0^t (4x+2)dx = 2 + \Big[2x + 2x^2\Big]_0^t = 2 + 2t + 2t^2$$

In particolare: $G(2) = 14$.

**4.** Al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, si discuta l'esistenza delle soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 2x + 2z = \alpha \\ 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

---

In forma matriciale il sistema si riscrive come:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \alpha \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Con i dovuti passaggi esso si trasforma in forma triangolare nella seguente maniera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \alpha - \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 - 3\alpha \end{array}\right)$$

Se $\alpha \neq 1$ il sistema è impossibile. Se $\alpha = 1$, esistono infinite soluzioni. Assumendo $\gamma$ come parametro queste sono date dall'espressione:

$$(x, y, z) = \left(\tfrac{1}{2} - \gamma,\ \tfrac{1}{2} - 2\gamma,\ \gamma\right)$$

Da ciò si deduce che il determinante della matrice corrispondente al sistema è sempre nullo.