Compito del 9 - 1 - 2024

1. Dato $n \in \mathbf{N}$, con $n \geq 1$, sia $f :]-1, n] \to \mathbf{R}$, definita come:

$$f(x) = x + 1 \quad \text{se } x \in]-1, 0] \qquad f(x) = e^{-x} \quad \text{se } x \in]0, n]$$

Trovare l'immagine di f e dedurre (se esistono) le quantità: $\sup(f)$, $\inf(f)$, $\max(f)$, $\min(f)$. Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è invertibile.

L'immagine consiste nell'intervallo $]0, 1]$, per cui $\sup(f)= \max(f)=1$, $\inf(f)=0$, mentre $\min(f)$ non esiste. La funzione è continua su tutto il dominio. E' derivabile in tutto il dominio tranne che per $x = 0$. La f non risulta essere invertibile in quanto non iniettiva e non suriettiva.

2. Disegnare il grafico della funzione $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ data da:

$$f(x) \;=\; \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

Determinare l'immagine di f. Dimostrare che f non è iniettiva.

La funzione è continua e derivabile infinite volte in tutto il dominio. Si ha:

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} \qquad f''(x) = -\frac{2\sin x\ (1 + \cos x)}{(2 - \cos x)^3}$$

Da ciò si deduce che f' si annulla solo per $x = \pi/3$ e che $f'' \leq 0$. Dunque f è concava e assume valore massimo quando $x = \pi/3$. Si ricava pertanto come immagine l'intervallo: $[0, f(\pi/3)] = [0, \sqrt{3}/3]$. La funzione non è iniettiva perché, ad esempio, $f(0) = f(\pi) = 0$.

3. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$ dove la successione è data da:

$$a_n = \int_{-1}^{n} x f(x)\ dx$$

e f è definita nell'esercizio **1**.

Si ha:

$$a_n = \int_{-1}^{0} x(x + 1)\ dx + \int_{0}^{n} xe^{-x}\ dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^n = \frac{5}{6} - (n+1)e^{-n}$$

Si ricava dunque: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 5/6$.

4. Al variare di $\gamma \in \mathbf{R}$, applicando l'algoritmo di eliminazione Gaussiana, si ricavino le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x - z = 3 \\ x + \gamma y + 2z = 1 - \gamma \\ -x + 2z = -1 \end{cases}$$

Tra queste, si calcolino quelle che hanno norma pari a $\sqrt{2}$.

In forma matriciale il sistema si riscrive come:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & \gamma & 2 & 1-\gamma \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Con i dovuti passaggi esso si trasforma in forma triangolare nella seguente maniera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \gamma & \frac{7}{3} & -\gamma \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Questo porta alle relazioni: $z = 0$, $\gamma y = -\gamma$, $x = 1$. Se $\gamma \neq 0$ il sistema ammette l'unica soluzione $(1, -1, 0)$ che ha già norma pari a $\sqrt{2}$. Altrimenti, vi sono infinite soluzioni della forma $(1, y, 0)$, con y arbitrario. Di tali soluzioni, quelle che hanno norma pari a $\sqrt{2}$ sono $(1, \pm 1, 0)$.