Compito del 24 - 1 - 2024

1. Mediante fattorizzazione LU risolvere il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3\alpha \\ 14-9\alpha \\ -5+9\alpha \end{pmatrix}$$

determinare $\alpha > 0$ in modo che (x_1, x_2, x_3) sia ortogonale al vettore $(0, -3, 1)$.

La soluzione viene ad essere: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 3\alpha)$. Questo vettore è ortogonale a $(0, -3, 1)$ quando $\alpha = 1$.

2. Sia assegnata la funzione positiva g e la curva:

$$\vec{\gamma}(t) = \Big(g(t)\cos(2\pi t),\ g(t)\sin(2\pi t)\Big) \qquad t \in [0, 1].$$

Si calcoli il lavoro lungo $\vec{\gamma}$ all'interno del campo:

$$\vec{F}(x, y) = \Big(2x,\ \cos y\Big)$$

A meno di costante additiva, il campo ammette potenziale $P(x, y) = x^2 + \sin y$. Dato che $\vec{\gamma}(0) = (g(0), 0)$ e $\vec{\gamma}(1) = (g(1), 0)$, il lavoro risulta essere: $P(g(1), 0) - P(g(0), 0) = g^2(1) - g^2(0)$.

3. Per $t \geq 0$, calcolare la soluzione dell'equazione differenziale:

$$y'(t) \ = \ e^{y(t)} \sin t \qquad \text{con} \qquad y(0) = -1.$$

Dire quanto vale $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

L'equazione è a separazione di variabili. Dopo aver integrato si ricava:

$$-e^{-y(t)} \ = \ -\cos t + c$$

dove la costante c va ricavata in base alla condizione iniziale, ottenendo dunque:

$$y(t) = -\ln(e - 1 + \cos t).$$

Il limite della suddetta espressione per $t \to +\infty$ non esiste.

4. Si integri la funzione $f(x, y) = x(x^2 + y^2)$ sul dominio D costituito dalla regione del quarto quadrante compresa fra le circonferenze di raggio 1 e 3 centrate nell'origine.

Si può facilmente operare in coordinate polari:

$$\int_D f(x,y)\ dxdy = \int_{-\pi/2}^{0} \left(\int_1^3 \rho^4 \cos\theta\ d\rho \right) d\theta = \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_1^3 = \frac{3^5 - 1}{5}.$$