Compito del 23 - 1 - 2024

1. Sia $f :]-1, 1[\to [0, 1]$, definita come:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{se } x \in]-1, 0] \qquad f(x) = 1 \quad \text{se } x \in]0, 1[$$

Trovare l'immagine di f e dedurre (se esistono) le quantità: sup(f), inf(f), max(f), min(f). Dire in che punti f è continua e/o derivabile. Dire se f è suriettiva, iniettiva, invertibile.

L'immagine consiste nell'intervallo $]0, 1]$, per cui sup(f)= max(f)=1, inf(f)=0, mentre min(f) non esiste. La funzione è continua e derivabile su tutto il dominio. La f non risulta essere invertibile in quanto non iniettiva e non suriettiva.

2. Disegnare il grafico della funzione $f :]-\infty, 0] - \{-1\} \to \mathbf{R}$ data da:

$$f(x) \ = \ \frac{1}{x^2 - x - 2}$$

Determinare l'immagine di f. Dire se f è iniettiva.

La funzione è continua e derivabile infinite volte in tutto il dominio. La sua derivata prima è sempre positiva, mentre la derivata seconda è positiva per $x < -1$ e negativa per $x > -1$. Nel punto $x = 0$, dove $f(0) = -\frac{1}{2}$, si ottiene un massimo locale. Inoltre:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Da ciò si deduce che immagine è l'insieme: $]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup]0, +\infty[$. La funzione è iniettiva. Si noti tuttavia che non è crescente.

3. Per $t \in [-1, 1]$ si determini la funzione:

$$G(t) = \int_0^t x f(x) \ dx$$

dove f è definita nell'esercizio **1**.

Per $t \in [-1, 0]$ si ha:

$$G(t) = \int_0^t x\sqrt{1-x^2} \ dx = -\tfrac{1}{3}\Big[(1-x^2)^{3/2}\Big]_0^t = -\tfrac{1}{3}[(1-t^2)^{3/2} - 1].$$

Per $t \in [0,1]$ si ha invece:

$$G(t) = \int_0^t x\ dx = \tfrac{1}{2}t^2.$$

4. Si risolva il sistema lineare:

$$\begin{cases} ix + 2iy = 1 \\ 3x + 4y = -3i \end{cases}$$

La matrice corrispondente e la sua inversa hanno la forma:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2i \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad\qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -\frac{3}{2}i & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$