Compito del 10 - 1 - 2024

1. Dato il parametro $\alpha \in \mathbf{R}$, calcolare gli autovettori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Selezionare quelli che hanno norma pari ad 1. Trovare il determinante di A e della sua inversa (quando esiste).

Gli autovalori sono $\alpha - \sqrt{2}$, α, $\alpha + \sqrt{2}$ e i corrispondenti autovettori hanno la forma: $a(1, -\sqrt{2}, 1)$, $b(1, 0, -1)$, $c(1, \sqrt{2}, 1)$, dove a, b e c sono parametri arbitrari. Quelli di norma 1 sono ottenuti per: $a = \pm 1/2$, $b = \pm 1/\sqrt{2}$, $c = \pm 1/2$. Il determinante di A si ricava dal prodotto degli autovalori ed è pari a $\alpha(\alpha^2 - 2)$. Ne consegue che il determinante di A^{-1} è $1/\alpha(\alpha^2 - 2)$, purché si abbia $\alpha \neq 0$ oppure $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$.

2. Sia data la curva:

$$\vec{\gamma}(t) = \Big(t\cos(2\pi t),\ t\sin(2\pi t),\ t\Big) \qquad t \in [0, n]$$

dove $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$. Si calcoli al variare di n il lavoro lungo $\vec{\gamma}$ all'interno del campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = \Big(4x^3y + z^2,\ x^4,\ 2xz\Big)$$

A meno di costante additiva, il campo ammette potenziale:

$$P(x, y, z) = x^4y + xz^2.$$

Dato che $\vec{\gamma}(0) = (0, 0, 0)$ e $\vec{\gamma}(n) = (n, 0, n)$, il lavoro viene ad essere: $P(n, 0, n) - P(0, 0, 0) = n^3$.

3. Calcolare $\lim_{t\to+\infty} y(t)$, dove y risolve il sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) + 2z(t) \\ \\ z'(t) = 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

con le condizioni $y(0) = 2$ e $z(0) = -1$.

La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = -3$ con autovettori $(2a, -a)$ e $\lambda_2 = 2$ con autovettori $(b, 2b)$, per cui la soluzione generale risulta essere:

$$y(t) = 2ae^{-3t} + be^{2t} \qquad\qquad z(t) = -ae^{-3t} + 2be^{2t}$$

Imponendo le condizioni iniziali si deduce che: $a = 1$ e $b = 0$. Dunque $y(t) = 2e^{-3t}$, per cui il calcolo del corrispondente limite fornisce: $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

4. Data la funzione $f(x, y) = 1/(1 + x^2)$ ed il dominio:

$$D = \{0 \le x \le 1,\ 1 - x^4 \le y \le 1 + x^2\}$$

calcolare: $I = \int_D f(x, y)\ dxdy$.

Si ha:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + x^2} \int_{1-x^4}^{1+x^2} dy \right) dx = \int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}.$$