Prova parziale del 7 - 11 - 2023

1. Sia data la funzione $f : A = [-1, 1] - \{0\} \to B$ ($B \subset \mathbf{R}$) in modo che:

$$f(x) = \frac{2}{x} + 1 \text{ se } x \in [-1, 0[; \qquad f(x) = 1 - x \text{ se } x \in]0, 1]$$

Trovare l'immagine Im(f) e (se esistono): sup(f), inf(f), max(f), min(f). Dire in che punti di A si ottiene che f è continua e derivabile. Posto B=Im(f) dire se f è invertibile. Nel caso che la funzione inversa esista fornire la sua espressione.

Si ha Im(f)=$]-\infty, -1] \cup [0, 1[$ da cui si ricava inf(f)=$-\infty$ e sup(f)=1. Massimo e minimo non esistono. La funzione è continua e derivabile in tutto A. Con B=Im(f) la funzione risulta essere invertibile e si ha:

$$f^{-1}(y) = \frac{2}{y-1} \text{ se } y \in]-\infty, -1]; \qquad f^{-1}(y) = 1 - y \text{ se } y \in [0, 1[.$$

2. Disegnare il grafico della funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$, data da:

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

Determinare l'immagine di f. E' possibile prolungare f alla semiretta chiusa $[0, +\infty[$ in modo che la nuova funzione risultante sia continua?

Si ha che f è continua e derivabile in tutto in tutto il dominio. Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \qquad f'(x) = \frac{x-2}{x^3}$$

Constatato che $f'(2) = 0$ e che $f(2) = -1/4$, si ricava dunque: Im(f)=$[-\frac{1}{4}, +\infty[$.

La funzione non è prolungabile con continuità in $x = 0$ perché, qualunque sia il valore reale assegnato ad $f(0)$, non si può ottenere $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, dato che il limite non è finito.