Compito del 9 - 1 - 2018

1. Calcolare gli autovettori della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Verifcare che essi sono a due a due ortogonali. Selezionare quelli che hanno norma pari ad 1. Trovare il determinante di A e della sua inversa.

Gli autovalori sono $3-\sqrt{2}$, 3, $3+\sqrt{2}$ e i corrispondenti autovettori hanno la forma: $a(1,-\sqrt{2},1)$, $b(1,0,-1)$, $c(1,\sqrt{2},1)$, dove a, b e c sono parametri arbitrari. La matrice è simmetrica per cui gli autovettori sono ortogonali fra loro a due a due. Quelli di norma 1 sono ottenuti per: $a = \pm 1/2$, $b = \pm 1/\sqrt{2}$, $c = \pm 1/2$. Il determinante di A si ricava dal prodotto degli autovalori ed è pari a 15. Ne consegue che il determinante di A^{-1} è $1/15$.

2. Sia data la curva definita dall'unione dei tre pezzi:

$$\vec{\gamma}_A(t) = (t\cos t,\ t\sin t) \qquad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\vec{\gamma}_B(t) = \left(\frac{\pi}{2}\cos t,\ \frac{\pi}{2}\sin t\right) \qquad t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

$$\vec{\gamma}_C(t) = \left(\frac{1}{2}(t-2\pi),\ 0\right) \qquad t \in [\pi, 2\pi]$$

Si calcoli la sua lunghezza $\mathcal{L}$ e l'integrale lungo essa del campo:

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{\sin y}{(x+1)^2},\ \frac{\cos y}{x+1}\right), \qquad \text{con } x > -2.$$

Si ha: $\vec{\gamma}_A' = (\cos t - t\sin t,\ \ \sin t + t\cos t)$, per cui $|\vec{\gamma}_A'| = \sqrt{1+t^2}$. La lunghezza di $\vec{\gamma}_A$ è dunque pari a: $\mathcal{L}_A = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1+t^2}\,dt$. La lunghezza dell'arco di circonferenza $\vec{\gamma}_B$ è pari $\pi^2/4$. La lunghezza del segmento $\vec{\gamma}_C$ vale $\pi/2$. Pertanto si ha che $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{2}\pi$. Il campo $\vec{F}$ è conservativo ed ammette come potenziale $P(x,y) = \sin y/(x+1)$. Il lavoro risulta essere nullo in quanto la curva è chiusa (e tutta contenuta nel semipiano $x > -2$).

3. Trovare la soluzione del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) + 2z(t) \\ \\ z'(t) = 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

soddisfacente $y(0) = 3$ e $z''(0) = -1$.

La matrice corrispondente $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ha autovalori: $\lambda_1 = -3$ con autovettori $(2a, -a)$ e $\lambda_2 = 2$ con autovettori $(b, 2b)$, per cui la soluzione generale risulta essere:

$$y(t) = 2ae^{-3t} + be^{2t} \qquad z(t) = -ae^{-3t} + 2be^{2t}$$

Imponendo le condizioni iniziali si deduce che: $a = 1$ e $b = 1$.

4. Sia D la regione del piano compresa fra l'asse x e il grafico della funzione:

$$g(x) = x + 2 \qquad -2 \leq x \leq -1,$$

$$g(x) = 1 \qquad -1 \leq x \leq 2,$$

$$g(x) = 3 - x \qquad 2 \leq x \leq 3.$$

Calcolare:

$$I = \int_D e^y \, dxdy$$

Si può velocemente descrivere D nel seguente modo:

$$D = \{0 \leq y \leq 1, \; y - 2 \leq x \leq 3 - y\}.$$

Dunque:

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y-2}^{3-y} e^y \, dx \right) dy = \int_0^1 e^y (5 - 2y) dy = 5e - 7.$$