Compito del 12 - 1 - 2022

1. Mediante fattorizzazione LU si risolva il sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dove β è un parametro reale. Discutere la molteplicità delle soluzioni al variare di β.

Si ha:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3+\beta \end{pmatrix}$$

Si risolve prima il sistema $L\vec{y} = (1, -3, -1)$, il quale fornisce $\vec{y} = (1, -3, 0)$. Nel risolvere il sistema $U\vec{x} = \vec{y}$, occorre distinguere fra $\beta \neq -3$ e $\beta = -3$. Nel primo caso si ha un'unica soluzione $\vec{x} = (1, -1, 0)$. Nel secondo caso ci sono infinite soluzioni che si possono esprimere nel seguente modo: $\vec{x} = (1 + 3z, -1, z)$, con z parametro reale. Con $z = 0$ si ritrova quella relativa al caso precedente.

2. Sia data la curva:

$$\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) = \left(t^2 e^{\sin(t^2+1)\pi},\ \ln(t^2+1)\right) \quad t \in [0, 1]$$

immersa nel campo $\vec{F}(x, y) = (2x + \cos y,\ -x \sin y)$. Calcolare il lavoro $\mathcal{L}$ corrispondente.

Il campo ammette potenziale: $P(x, y) = x^2 + x \cos y$. Dato che $\vec{\gamma}(0) = (0, 0)$ e $\vec{\gamma}(1) = (1, \ln 2)$, il lavoro si calcola come differenza di potenziale:

$$\mathcal{L} = P(1, \ln 2) - P(0, 0) = 1 + \cos(\ln 2)$$

3. Calcolare le soluzioni y e z del sistema differenziale:

$$\begin{cases} y'(t) = -2y(t) - z(t) \\ \\ z'(t) = 3y(t) - 6z(t) \end{cases}$$

con $y(0) = 2$ e $z(0) = 4$.

La matrice corrispondente al sistema ammette l'autovalore $\lambda_1 = -3$ con autovettori dell forma $\alpha(1,1)$, con α parametro reale. Inoltre si ha l'autovalore $\lambda_2 = -5$ con autovettori dell forma $\beta(1,3)$, con β parametro reale. La soluzione soddisfacente le condizioni iniziali viene dunque ad essere: $y(t) = e^{-3t} + e^{-5t}$, $z(t) = e^{-3t} + 3e^{-5t}$.

4. Sia D l'insieme del primo quadrante ottenuto sottraendo dal cerchio di centro l'origine e raggio 2 il quadrato $[0,1] \times [0,1]$. Calcolare:

$$I = \int_D x \; dxdy$$

Sul quarto di cerchio, l'integrale può essere valutato in coordinate polari:

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^2 \rho^2 \cos\theta \; d\rho \right) d\theta = \frac{8}{3}$$

Per quanto riguarda il quadrato si ha:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 x \; dx \right) dy = \frac{1}{2}$$

Il valore finale risulta essere: $I = \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$.