

Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali

4.1 L'equazione del calore

Nel primo esempio che considereremo in questo capitolo si cerca una funzione $u : [a, b] \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ che sia soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$(4.1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = f(x, t)$$

dove f è una funzione assegnata.

Ad u si richiede anche di soddisfare talune condizioni iniziali e al contorno, e più precisamente, date α , β e u_0 , si vuole avere

$$(4.1.2) \quad u(a, t) = \alpha(t) \quad u(b, t) = \beta(t) \quad \forall t \in]0, T]$$

$$(4.1.3) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Dovrebbe essere noto al lettore che (4.1.1) è un'equazione di tipo *parabolico* detta *equazione del calore*. In effetti, con u si riesce a descrivere l'evoluzione nel tempo della densità di calore in una sbarra omogenea termoconduttrice $[a, b]$, mentre f è in relazione alle sorgenti di calore interne a detta sbarra. Diversi altri fenomeni a carattere *diffusivo* ⁽³²⁾ sono modellizzati altrettanto bene da (4.1.1). Non cureremo troppo gli aspetti teorici inerenti all'equazione in questione, peraltro studiatissima, per occuparci direttamente degli algoritmi per l'approssimazione di u . Una preparazione profonda e ad ampio spettro non

⁽³²⁾ Intenderemo con *diffusione* un processo irreversibile, con perdita di energia, ed effetto "regolarizzante" nel tempo. La nozione coincide con quella usualmente adottata nel linguaggio comune.

dovrebbe comunque essere tralasciata dal lettore, che, prima di intraprendere lo studio delle procedure numeriche, dovrebbe impadronirsi, non solo degli enunciati dei risultati teorici, ma anche degli strumenti utilizzati per le loro dimostrazioni, nonché dei principi fisici che regolano il modello considerato.

Cominciamo a discretizzare rispetto alla variabile spaziale x . Questa operazione non comporta difficoltà visto quanto appreso nel capitolo precedente. Osserviamo che, modificando opportunamente f , si può sempre fare in modo che siano soddisfatte le condizioni omogenee: $\alpha(t) = \beta(t) = 0 \quad \forall t \in]0, T]$; ipotesi che riterremo verificata da ora in avanti. Se vogliamo usare il metodo di Galerkin converrà riscrivere, per ogni fissato $t \in]0, T]$, l'equazione (4.1.1) in forma variazionale, cioè:

$$(4.1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b u(x, t) \psi(x) dx + \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \psi'(x) dx = \\ = \int_a^b f(x, t) \psi(x) dx \quad \forall \psi$$

Introdotta uno spazio a dimensione finita \mathbf{X}_d ed una sua base $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, d}$, si costruiscono le matrici $A_d = \left\{ \int_a^b \phi'_j \phi'_i dx \right\}$ e $B_d = \left\{ \int_a^b \phi_j \phi_i dx \right\}$. Per prima cosa ci procuriamo un'approssimazione u_d di u nella seguente forma: $u_d(x, t) = \sum_{j=1}^d c_j(t) \phi_j(x)$. Per ogni $t \in]0, T]$, u_d sarà soluzione di (4.1.4) per tutte le funzioni ψ appartenenti a \mathbf{X}_d . Questo vuol dire che, introdotto il vettore $\vec{x}(t) = \{c_j(t)\}_{j=1, \dots, d}$ dei coefficienti dell'espansione di u_d relativamente agli elementi della base, si ha l'equivalenza con il sistema differenziale

$$(4.1.5) \quad B_d \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right) + A_d \vec{x} = \vec{b}$$

Il vettore $\vec{b} \equiv \vec{b}(t)$ contiene i termini noti: $\int_a^b f(x, t) \phi_i(x) dx$ con $i = 1, \dots, d$. Per $t = 0$ usiamo la condizione (4.1.3) imponendo $\vec{x}(0) = \{c_j(0)\}_{j=1, \dots, d}$, dove si deve fare in modo che la funzione $\sum_{j=1}^d c_j(0) \phi_j \in \mathbf{X}_d$ sia una buona approssimazione di u_0 (ad esempio, si può proiettare opportunamente u_0 su \mathbf{X}_d , o si può considerare il suo interpolante in \mathbf{X}_d).

Il passo successivo è quello di discretizzare (4.1.5) rispetto alla variabile t . Le tecniche sono già state sviluppate nel capitolo due. Dividiamo l'intervallo $[0, T]$ in n_t parti uguali di ampiezza $h_t = T/n_t$, mediante i punti $t_k = kh_t$, $k = 0, \dots, n_t$. Applicando, ad esempio, il metodo di Eulero in avanti a (4.1.5), si

ricava

$$(4.1.6) \quad B_d \left(\frac{\vec{\zeta}_k - \vec{\zeta}_{k-1}}{h_t} \right) + A_d \vec{\zeta}_{k-1} = \vec{b}(t_{k-1}) \quad k = 1, \dots, n_t$$

dove $\vec{\zeta}_k \approx \vec{x}(t_k)$ $k \geq 1$ e $\vec{\zeta}_0 = \vec{x}(0)$.

In modo del tutto simile si implementano gli altri algoritmi studiati. Specifichiamo meglio prendendo, ad esempio, lo spazio \mathbf{X}_d delle funzioni continue e lineari a tratti, rispetto ad una partizione dell'intervallo $[a, b]$ in n_x parti uguali di ampiezza $h_x = (b - a)/n_x$ attraverso i nodi $x_j = a + jh_x$, con $j = 0, \dots, n_x$. Alle funzioni di \mathbf{X}_d verrà chiesto inoltre di annullarsi in $x = a$ e $x = b$ (quindi $d = n_x - 1$). Indicando con $\zeta_{j,k}$ la j -esima componente del vettore $\vec{\zeta}_k$, e ragionando come in (3.4.5), da (4.1.6) si deduce

$$(4.1.7) \quad h_x \frac{\zeta_{j+1,k} + 4\zeta_{j,k} + \zeta_{j-1,k}}{6h_t} - h_x \frac{\zeta_{j+1,k-1} + 4\zeta_{j,k-1} + \zeta_{j-1,k-1}}{6h_t} +$$

$$- \frac{\zeta_{j+1,k-1} - 2\zeta_{j,k-1} + \zeta_{j-1,k-1}}{h_x} = \int_a^b f(x, t_{k-1}) \phi_j(x) dx$$

con $\zeta_{0,k} = \zeta_{n_x,k} = 0$ per $k = 1, \dots, n_t$ e $\zeta_{j,0} = u_0(x_j)$ per $j = 0, \dots, n_x$.

Fissati gli indici k e j , per visualizzare i valori coinvolti nell'espressione (4.1.7), si fa uso di un diagramma detto *stencil*. Lo vediamo in figura 4.1.1.

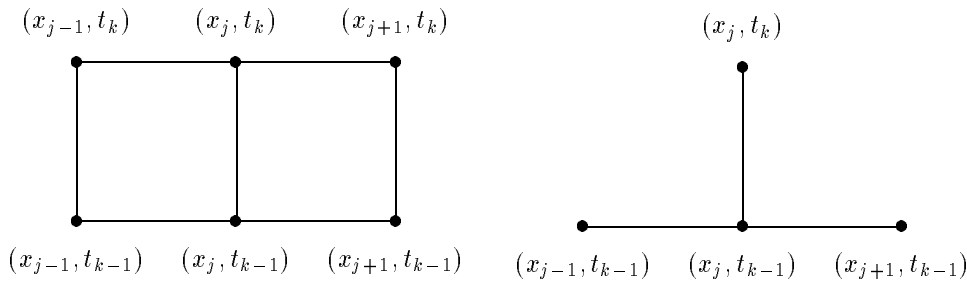


Figura 4.1.1- Stencil relativo a (4.1.7). **Figura 4.1.2-** Stencil relativo a (4.1.8).

Nei metodi espliciti deve comparire un solo rappresentante nella parte superiore dello *stencil*. Malgrado sia stato usato il metodo di Eulero in avanti, il metodo risultante da (4.1.7) è di tipo implicito. Una variante esplicita è il seguente metodo alle differenze finite:

$$(4.1.8) \quad \frac{\zeta_{j,k} - \zeta_{j,k-1}}{h_t} - \frac{\zeta_{j+1,k-1} - 2\zeta_{j,k-1} + \zeta_{j-1,k-1}}{h_x^2} = f(x_j, t_{k-1})$$

in cui si impone con evidenza la sostituzione delle derivate parziali con i rapporti incrementali. Il corrispondente *stencil* si trova in figura 4.1.2. Sia mediante (4.1.7) che mediante (4.1.8), i valori ottenuti $\zeta_{j,k}$ approssimano la soluzione u di (4.1.1) nei punti (x_j, t_k) . Tale approssimazione è tanto più accurata quanto più h_t e h_x sono piccoli. Il lettore dovrebbe essere in grado di fornire delle maggiorazioni all'errore $|\zeta_{j,k} - u(x_j, t_k)|$ facendo tesoro dei risultati dei capitoli precedenti. L'errore converge a zero per h_t e h_x entrambi tendenti a zero, ma occorre supporre che h_t decada più velocemente di h_x , come emerge dalle seguenti considerazioni. Ricordiamo che, a causa della disuguaglianza (2.5.9), il metodo (4.1.8) ha speranza di funzionare bene solo se si assume che $h_t < 2 \min_{1 \leq m \leq d} \left(\text{Re} \lambda_{d,m} / |\lambda_{d,m}^2| \right)$, dove i $\lambda_{d,m}$ $m = 1, \dots, d$ sono gli autovalori della matrice A_d . Osserviamo che (2.5.7) è soddisfatta, sapendo che $-A_d$ ha autovalori reali e negativi (si ricordi anche (3.4.11)). In base a (3.7.6) abbiamo $\lambda_{d,m} = 2h_x^{-2} \left(\cos(mh_x\pi/(b-a)) - 1 \right)$ per $m = 1, \dots, d$. Questo porta alla condizione

$$(4.1.9) \quad h_t < \frac{2}{|\lambda_{d,d}|} < \frac{1}{2}h_x^2$$

La disuguaglianza (4.1.9) pone delle restrizioni piuttosto forti al passo di discretizzazione temporale h_t . Se, da una parte, occorre scegliere h_x piccolo per avere una buona approssimazione rispetto alla variabile spaziale, si è obbligati, nel rispettare (4.1.9), ad eseguire numerosi passi temporali, che crescono con il quadrato della dimensione d . In alternativa, potrebbe convenire discretizzare (4.1.5) con un metodo di tipo implicito (Eulero all'indietro, trapezi, o altri metodi visti nel capitolo 2) che, essendo $-A_d$ definita negativa, non impone restrizioni sul parametro h_t . Si ricordi però che, in tal caso, occorre risolvere un sistema lineare di dimensione d ad ogni iterazione. La versione di (4.1.8), che fa capo al metodo dei trapezi, è rappresentata dal metodo di *Crank-Nicolson*:

$$(4.1.10) \quad \frac{\zeta_{j,k} - \zeta_{j,k-1}}{h_t} - \frac{\zeta_{j+1,k} - 2\zeta_{j,k} + \zeta_{j-1,k}}{2h_x^2} + \\ - \frac{\zeta_{j+1,k-1} - 2\zeta_{j,k-1} + \zeta_{j-1,k-1}}{2h_x^2} = \frac{1}{2}f(x_j, t_k) + \frac{1}{2}f(x_j, t_{k-1})$$

il cui *stencil* è ancora quello di figura 4.1.1.

Mediante (4.1.8), abbiamo approssimato (4.1.1) con $[a, b] = [-1, 1]$, $\alpha = \beta = 0$ e $f = 0$. Il dato iniziale u_0 è la funzione *delta di Dirac* (sorgente di calore infinita, concentrata in un punto) relativa a $x = 0$, che viene approssimata in \mathbf{X}_d (d pari) con la funzione lineare a tratti che vale $1/h_x$ in $x = 0$ e zero negli altri nodi. Presi $h_x = 1/20$ e $h_t = 1/1000$, al fine di soddisfare (4.1.9), vediamo in figura 4.1.3 l'evoluzione a differenti istanti della soluzione approssimata, la quale riflette abbastanza bene il reale comportamento della soluzione esatta, nonostante il dato iniziale u_0 sia difficoltoso da trattare. Ad una variazione rapidissima nei primi istanti (che perdona la scelta di h_t piccolo), succede un lento decadimento (che non giustifica più la scelta di passi temporali piccoli, anche se, purtroppo, (4.1.9) deve essere rispettata). Il lettore è invitato a constatare personalmente le disastrose conseguenze che si manifestano quando (4.1.9) viene violata.

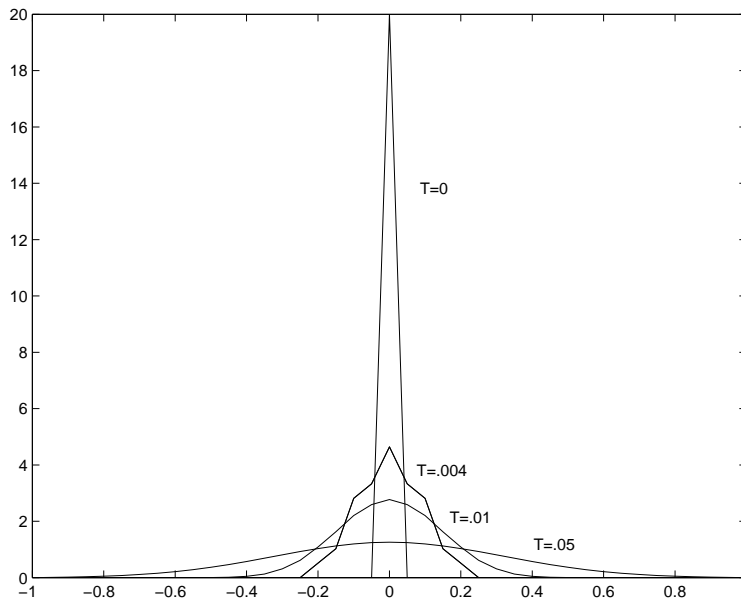


Figura 4.1.3 - Soluzione approssimata, a diversi istanti temporali, dell'equazione del calore, ottenuta tramite il metodo (4.1.8).

L'equazione (4.1.1) ha tutte le ragioni di essere interpretata come un sistema dinamico continuo, in uno spazio a dimensione infinita. Come nel para-

grafo 2.6, ci si può chiedere cosa avvenga alla soluzione u quando $t \rightarrow +\infty$. Se il problema è *autonomo*, cioè f non dipende da t , si perviene al problema ai dati al contorno $-u''_{\infty} = f$ con $u_{\infty}(a) = u_{\infty}(b) = 0$, dove si è posto $u_{\infty}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$. In pratica, u_{∞} è, nello spazio delle funzioni aventi una certa regolarità, uno stato stazionario. Data la natura dissipativa (si veda la nota ⁽³²⁾ a piè di pagina e l'esercizio 2 del paragrafo 4.9) del suddetto sistema dinamico, u_{∞} è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. Nel sistema dinamico discreto (4.1.8), la condizione (4.1.9) garantisce l'esistenza di un unico stato stazionario in \mathbf{X}_d asintoticamente stabile, che risulta essere un'approssimazione della funzione u_{∞} . Capita spesso, specialmente in occasione di problemi non lineari, che il vero obiettivo sia il calcolo di u_{∞} , e che la rappresentazione come limite di un sistema evolutivo (aggiungendo quindi la variabile t e ricorrendo alle derivate parziali) sia un artificio per mettere a punto nuove tecniche in campo numerico. La situazione appare assai più complicata quando f dipende da t . In tal caso l'esistenza di uno stato stazionario potrebbe non essere più assicurata.

Al posto di (4.1.2) si potrebbero avere le condizioni $\frac{\partial}{\partial x}u(a, t) = \alpha(t)$ e $\frac{\partial}{\partial x}u(b, t) = \beta(t)$, che, quando $\alpha = \beta = 0$, corrispondono fisicamente ad un *flusso* di calore nullo alle estremità della sbarra $[a, b]$, che viene perciò ad essere isolata termicamente. Cenni sul trattamento di tali condizioni sono stati dati nel paragrafo 3.8.

L'esempio qui trattato ci ha consentito di utilizzare tutto il bagaglio di cognizioni accumulate nei precedenti capitoli. Lo studio dell'approssimazione delle equazioni alle derivate parziali abbisogna infatti di un'adeguata conoscenza delle nozioni di base in tutti i settori dell'Analisi Numerica. Ci basta aver attirato l'attenzione sulle linee generali, per lasciare poi libertà al lettore di impostare degli algoritmi in base alle proprie preferenze e al proprio livello culturale.

4.2 L'equazione delle onde

Di natura completamente differente da quella del calore è l'*equazione delle onde*

$$(4.2.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x, t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) = 0$$

che si cataloga fra quelle di tipo *iperbolico*. Oltre alle condizioni al contorno in (4.1.2), abbiamo una duplice assegnazione per quanto riguarda le condizioni iniziali, cioè

$$(4.2.2) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = u_1(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

dove le funzioni u_0 e u_1 sono note. In Meccanica, è classico vedere in u l'evoluzione nel tempo del profilo di una corda tesa vincolata agli estremi, oscillante in senso verticale, una volta assegnate la posizione e la velocità iniziali in ogni punto.

Non ci dovrebbero essere difficoltà a proporre algoritmi numerici per l'approssimazione di (4.2.1). Conosciamo già le tecniche per i problemi ai dati al contorno, che ci consentono di trattare la discretizzazione rispetto alla variabile x . Dopo aver applicato una di esse, ci si ritrova con un sistema differenziale del secondo ordine nella variabile t al quale sono assegnate condizioni iniziali alla Cauchy. Anche questo è abordabile con tecniche più o meno già sviluppate. Per esempio, con le stesse notazioni usate in (4.1.5), si perviene al sistema differenziale a d equazioni e d incognite:

$$(4.2.3) \quad B_d \left(\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \right) + A_d \vec{x} = 0$$

con $\vec{x}(0)$ e $\left(\frac{d}{dt} \vec{x} \right) (0)$ assegnati. Introdotta il vettore $\vec{y} = B_d \left(\frac{d}{dt} \vec{x} \right)$, (4.2.3) equivale al sistema differenziale a $2d$ equazioni e $2d$ incognite:

$$(4.2.4) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_d^{-1} \\ -A_d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$$

con $(\vec{x}(0), \vec{y}(0))$ assegnato. Si scopre che, in genere, la matrice in (4.2.4) ha autovalori immaginari puri. Questo denota l'assenza di dissipatività (i fenomeni oscillatori modellizzati da (4.2.1) non si smorzano). Bisogna prendere i dovuti accorgimenti se si vuole seguire la soluzione per lunghi periodi temporali. Rammentiamo quanto detto verso la fine del paragrafo 2.6, ed i risultati degli esercizi 9 e 14 del paragrafo 2.8. Schiviamo i dettagli e lasciamo al lettore l'incombenza di un esame più accurato della situazione, rinviando all'esercizio 6 del paragrafo 4.7. Ci impegnamo invece a produrre ulteriori elementi, atti a mettere in luce alcune insidie celate nello studio di problemi di tipo iperbolico.

Supponiamo per un momento che $]a, b[=]-\infty, +\infty[$ e che le condizioni al contorno siano sostituite da un veloce decadimento a zero della soluzione u per $|x| \rightarrow +\infty$. Il *principio di sovrapposizione*, dovuto a D'Alambert, dice che u è rappresentabile come somma di due forme d'onda v_0 e w_0 , viaggianti nel tempo con pari velocità in direzioni opposte, come emerge anche dalla seguente scrittura

$$(4.2.5) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= v_0(x - ct) + w_0(x + ct) = \\ &= \frac{1}{2}u_0(x - ct) + \frac{1}{2}u_0(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s) ds \end{aligned}$$

dove u_0 ed u_1 sono le funzioni che erano state assegnate in (4.2.2) ⁽³³⁾.

La funzione che transla verso destra $v(x, t) = v_0(x - ct)$, e quella che transla verso sinistra $w(x, t) = w_0(x + ct)$, soddisfano rispettivamente le due equazioni alle derivate parziali

$$(4.2.6) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x}$$

con $c > 0$ ⁽³⁴⁾. Suggeriamo al lettore di rinfrescarsi le idee saltando indietro all'esercizio 9 del paragrafo 2.8, e poi di mettere in connessione quei risultati con il sistema di equazioni (4.2.6).

Tornando all'intervallo finito $[a, b]$, la presenza delle condizioni al contorno fa sì che il principio di sovrapposizione non sia più applicabile. Tuttavia, se i dati iniziali sono a supporto compatto in $]a, b[$, la soluzione u si evolve come prescritto in (4.2.5) fintanto che non lambisce il bordo. E' consueto quindi rifarsi allo studio dei due problemi alle derivate parziali del primo ordine con i dati iniziali e al contorno:

$$(4.2.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -c \frac{\partial v}{\partial x} \\ v(a, t) = 0 \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = c \frac{\partial w}{\partial x} \\ w(b, t) = 0 \\ w(x, 0) = w_0(x) \end{cases}$$

⁽³³⁾ Il fatto che la soluzione di (4.2.1) sia nota non rende vani gli sforzi, fatti in precedenza, per approssimarla. Se il problema differenziale dovesse venire alterato (e il ripristino delle condizioni al contorno costituisce una notevole perturbazione), non saremmo più capaci di calcolarne esplicitamente la soluzione, mentre le tecniche numeriche resterebbero comunque in vigore.

⁽³⁴⁾ E' forte la tentazione di scrivere: $\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$, anche se non è immediato dare a questa relazione un significato rigoroso.

con $c > 0$. Si osservi che, per evitare situazioni di incoerenza, si è dovuto assegnare un'unica condizione al contorno per v (rispettivamente w) a sinistra (rispettivamente a destra). Evidentemente, la funzione somma $v + w$ risolve (4.2.1), ma non soddisfa le condizioni al contorno omogenee in $x = a$ e $x = b$. Esamineremo alcune tecniche numeriche per l'approssimazione delle soluzioni di (4.2.7), per poi trarre le ultime conclusioni relativamente all'equazione delle onde. Nell'ambito dei metodi alle differenze finite (sostituendo cioè le derivate con i rapporti incrementali) si possono considerare delle approssimazioni $\zeta_{j,k}$ di $v(x_j, t_k) = v_0(x_j - ct_k)$, ottenute mediante lo schema esplicito

$$(4.2.8) \quad \frac{\zeta_{j,k} - \zeta_{j,k-1}}{h_t} = -c \frac{\zeta_{j,k-1} - \zeta_{j-1,k-1}}{h_x} \quad j = 1, \dots, n_x \quad k \geq 1$$

con $\zeta_{0,k} = 0 \quad k \geq 1$, e $\zeta_{j,0} = v_0(x_j) \quad j = 0, \dots, n_x$. Lo *stencil* corrispondente è quello di figura 4.2.1.

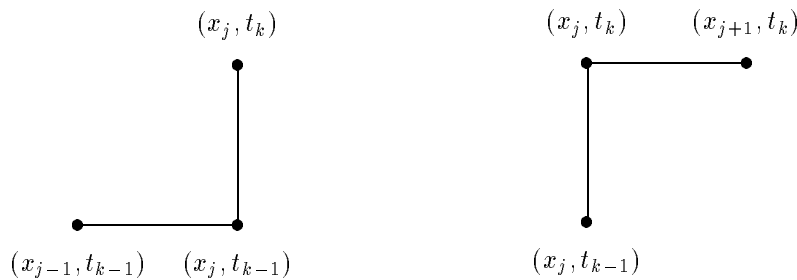


Figura 4.2.1- Stencil relativo a (4.2.8). **Figura 4.2.2-** Stencil relativo a (4.2.11).

Notiamo che, se v , al tempo t_{k-1} , è nota nell'intervallo $[x_{j-1}, x_j]$, essa, al tempo t_k , sarà univocamente determinata nell'intervallo $[x_{j-1} + ch_t, x_j + ch_t]$, essendosi riprodotta tale e quale per traslazione. Se si desidera che quest'ultimo intervallo includa il punto x_j , occorre imporre

$$(4.2.9) \quad h_t \leq \frac{1}{c} h_x$$

che è nota come *condizione CFL* (da Courant, Friedrichs e Lewy). Essa pone restrizioni sul passo h_t , in modo inversamente proporzionale alla velocità c di propagazione dell'onda. In (4.2.8) è obbligatorio che (4.2.9) sia soddisfatta, affinché abbia un senso determinare $\zeta_{j,k}$ a partire dai valori $\zeta_{j,k-1}$ e $\zeta_{j-1,k-1}$.

La violazione della condizione CFL conduce a seri problemi di instabilità per l'algoritmo ⁽³⁵⁾. Per analoghi motivi, le cose peggiorano se si considera il metodo: $(\zeta_{j,k} - \zeta_{j,k-1})/h_t = -c(\zeta_{j+1,k-1} - \zeta_{j,k-1})/h_x$, che al contrario funziona egregiamente per l'approssimazione di w , dopo aver sostituito $-c$ con c e tenendo sempre valida (4.2.9). Parimenti vietato è l'uso del metodo esplicito

$$(4.2.10) \quad \frac{\zeta_{j,k} - \zeta_{j,k-1}}{h_t} = -c \frac{\zeta_{j+1,k-1} - \zeta_{j-1,k-1}}{2h_x} \quad j = 1, \dots, n_x - 1 \quad k \geq 1$$

In altre parole, i metodi che hanno possibilità di successo sono quelli in cui lo *stencil* non ha ramificazioni nel verso di spostamento della soluzione. Di fatto, il rapporto incrementale $(\zeta_{j,k-1} - \zeta_{j-1,k-1})/h_x$, nel contesto dell'equazione in (4.2.8), è denominato di tipo *upwind* (che può essere tradotto dall'inglese come: controvento).

Nell'ambito dei metodi di tipo implicito, citiamo ad esempio

$$(4.2.11) \quad \frac{\zeta_{j,k} - \zeta_{j,k-1}}{h_t} = -c \frac{\zeta_{j+1,k} - \zeta_{j,k}}{h_x} \quad j = 0, \dots, n_x - 1 \quad k \geq 1$$

in cui (4.2.9) può anche non essere presa in considerazione. Il relativo *stencil* è visibile in figura 4.2.2.

La soluzione u dell'equazione delle onde, anche se non direttamente collegata all'evoluzione delle soluzioni v e w di (4.2.7), eredita da esse molte proprietà. La stesura di un qualsiasi metodo numerico per la discretizzazione di (4.2.4), specialmente se di tipo esplicito, deve pertanto passare al vaglio della disuguaglianza (4.2.9).

4.3 Leggi di conservazione e l'equazione di Burgers

In questo paragrafo, prenderemo in considerazione l'equazione differenziale alle derivate parziali di tipo non lineare:

$$(4.3.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} F(u(x, t)) = 0$$

⁽³⁵⁾ Come già osservato nel paragrafo 2.6, per far chiarezza quando si parla di stabilità, bisogna discernere fra il caso T finito (h_t tendente a zero) e $T = +\infty$ (h_t fissato). Nell'esercizio 7 del paragrafo 4.7 si pongono le basi per uno studio teorico più approfondito.

dove ϵ è un parametro positivo ed $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione assegnata.

A detta equazione aggiungiamo delle condizioni al contorno, ad esempio $u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad t > 0$; e quella iniziale $u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in [a, b]$. Nel caso in cui $F(u) = \frac{1}{2}u^2$, il termine non lineare in (4.3.1) prende la forma $u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$, e l'equazione viene detta di *Burgers*. Tratteremo in prevalenza quest'ultimo caso, anche se ciò che dedurremo sarà valido anche in altre situazioni. Nella formulazione (4.3.1) sono contemplate: l'equazione del calore ($F = 0$), le cosiddette equazioni di *diffusione-trasporto* (F costante non nulla), le *leggi di conservazione* ($\epsilon = 0$). Tutte hanno rilevanza in parecchi fenomeni della Fisica ed in altre branche. Lo studio teorico e l'implementazione di algoritmi numerici sono, per quanto riguarda (4.3.1), alquanto impegnativi. Varrebbe la pena di sviscerare per bene l'argomento, se non fossimo frenati dalla volontà di mantenere la trattazione ad un livello elementare. Dunque, ci limiteremo ad esprimere solo alcune valutazioni qualitative, consigliando al lettore una ricognizione in una buona biblioteca alla ricerca di testi più specializzati.

Solitamente, (4.3.1) presenta il termine diffusivo $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u$ moltiplicato per ϵ molto piccolo. Nel caso dell'equazione di Burgers, constatiamo la presenza del termine di trasporto $u \frac{\partial}{\partial x} u$ (si confronti con il caso lineare (4.2.6)) che influisce nel tempo sulla soluzione u con un effetto traslatorio, verso destra, se u stessa è positiva; verso sinistra, se u è negativa. La velocità di propagazione nel punto x all'istante t è proporzionale ad $|u(x, t)|$ ⁽³⁶⁾. Interessanti sono quindi le situazioni in cui u cambia segno in $[a, b]$.

In figura 4.3.1 si può vedere un modo tipico di evolversi della soluzione. Nell'intervallo $[0, 2]$, è stato attribuito il dato iniziale $u_0(x) = 1 - \cos 2\pi x$ se $x \in [0, 1]$, $u_0(x) = 0$ se $x \in [1, 2]$. Il parametro ϵ è pari ad $1/20$. Il grafico si propaga verso destra creando un *fronte d'onda*, cioè un breve tratto di forte variazione, tanto più ripido quanto più ϵ è piccolo. Contemporaneamente, si attiva un movimento traslatorio a velocità pressochè costante, finchè la presenza del bordo ed effetti di tipo dissipativo non schiacciano la funzione a

⁽³⁶⁾ Si definiscono le *caratteristiche* come le curve di livello della funzione $\gamma(x, t)$ soddisfacente la relazione $x = \gamma(x, t) + tF'(u_0(\gamma(x, t)))$. Per $\epsilon = 0$, la soluzione di (4.3.1) propaga il dato iniziale u_0 in modo che si mantenga costante lungo le caratteristiche. Un cosiddetto *shock* si realizza all'incontro di due caratteristiche, obbligando la soluzione a diventare discontinua. Se $F = \pm c$, le caratteristiche, compatibilmente a (4.2.6), sono rette parallele e non si sviluppano *shocks*.

zero. E' evidente come il trattamento numerico, nel caso in cui ϵ risultasse molto piccolo ⁽³⁷⁾, crei non pochi inconvenienti (si veda (3.6.5)).

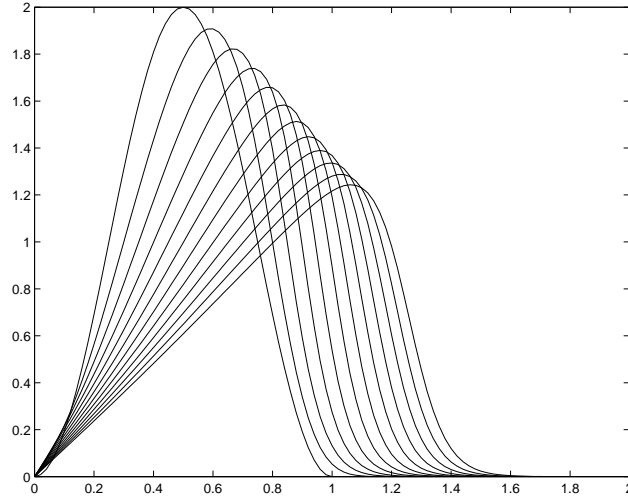


Figura 4.3.1 - Soluzione dell'equazione di Burgers ad intervalli regolari di tempo.

Passeremo in rassegna alcuni metodi classici alle differenze finite per la discretizzazione dell'equazione di Burgers. Tra i metodi espliciti prendiamo in considerazione il seguente:

$$(4.3.2) \quad \frac{\zeta_{j,k} - \zeta_{j,k-1}}{h_t} - \epsilon \frac{\zeta_{j+1,k-1} - 2\zeta_{j,k-1} + \zeta_{j-1,k-1}}{h_x^2} + \zeta_{j,k-1} \frac{\zeta_{j+1,k-1} - \zeta_{j-1,k-1}}{2h_x} = 0$$

dove la derivata prima è calcolata come in (4.2.10). La convergenza è garantita per h_t ed h_x tendenti a zero, ma, se ϵ è piccolo (come avviene spesso in relazione a modelli concernenti fluidi a bassa *viscosità*), si cominciano ad avere risultati incoraggianti solo a partire da h_t e h_x anch'essi estremamente piccoli. Non va dimenticata la condizione (4.1.9), che, nel caso attuale, diviene: $h_t < h_x^2/2\epsilon$.

⁽³⁷⁾ Il caso $\epsilon = 0$ è per raffinati specialisti, essendo anche assai problematico lo studio teorico dell'esistenza e dell'unicità della soluzione.

Ricordando quanto asserito alla fine del precedente paragrafo, può convenire trattare il termine non lineare nel seguente modo

$$(4.3.3) \quad \begin{cases} \zeta_{j,k-1} \frac{\zeta_{j,k-1} - \zeta_{j-1,k-1}}{h_x} & \text{se } \zeta_{j,k-1} \geq 0 \\ \zeta_{j,k-1} \frac{\zeta_{j+1,k-1} - \zeta_{j,k-1}}{h_x} & \text{se } \zeta_{j,k-1} \leq 0 \end{cases}$$

salvaguardando la condizione CFL, che qui assume la forma: $h_t \leq h_x/c_k$ con $c_k = \max_j |\zeta_{j,k-1}|$. Per maggiori ragguagli rinviamo agli esercizi 9 e 10 del paragrafo 4.7. Al posto di (4.3.3) si può anche usare

$$(4.3.4) \quad \begin{cases} \frac{\zeta_{j,k-1}^2 - \zeta_{j-1,k-1}^2}{2h_x} & \text{se } \zeta_{j,k-1} > 0 \\ 0 & \text{se } \zeta_{j,k-1} = 0 \\ \frac{\zeta_{j+1,k-1}^2 - \zeta_{j,k-1}^2}{2h_x} & \text{se } \zeta_{j,k-1} < 0 \end{cases}$$

in cui risulta chiaro come le differenze finite siano state usate per l'approssimazione del termine non lineare nella forma $\frac{\partial}{\partial x} F(u) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} u^2$.

Riguardo alle tecniche di tipo implicito, si preferiscono evitare i metodi di Eulero all'indietro e dei trapezi (ricordiamo che quest'ultimo è più accurato), in quanto costringono, ad ogni passo temporale, alla risoluzione di un sistema non lineare di equazioni. Un'algoritmo di tipo *semi implicito* è il seguente:

$$(4.3.5) \quad \frac{\zeta_{j,k} - \zeta_{j,k-1}}{h_t} - \epsilon \frac{\zeta_{j+1,k} - 2\zeta_{j,k} + \zeta_{j-1,k}}{h_x^2} + \begin{cases} \zeta_{j,k-1} \frac{\zeta_{j,k-1} - \zeta_{j-1,k-1}}{h_x} & \text{se } \zeta_{j,k-1} \geq 0 \\ \zeta_{j,k-1} \frac{\zeta_{j+1,k-1} - \zeta_{j,k-1}}{h_x} & \text{se } \zeta_{j,k-1} \leq 0 \end{cases}$$

Pur dovendo risolvere ad ogni passo temporale un sistema lineare (sempre con la stessa matrice), ci si può permettere di dimenticarsi della condizione (4.1.9). Ci si aspetti comunque di dover rispettare una condizione di tipo CFL.

Nella valutazione degli algoritmi proposti intervengono troppi criteri, ed una ricetta valida per tutte le occasioni non può essere indicata a priori. In linea generale, la teoria insegna che l'adozione di metodi espliciti, benchè più semplici da applicarsi, è soggetta a restrizioni sui parametri h_t e h_x , che possono essere

talvolta molto severe, innalzando il costo globale di implementazione. Nei metodi impliciti questo avviene meno marcatamente, avendo anche il vantaggio di poter contare su ordini più elevati di convergenza. Un vero professionista dell'Analisi Numerica dovrebbe soppesare, con l'ausilio della teoria, le diverse proposte, prima di rischiare di imbarcarsi in brutte avventure.

4.4 Il problema di Poisson

I fenomeni naturali complessi si sviluppano in ambienti tridimensionali, spesso con geometria complicata, che può variare addirittura nel tempo. Per non rimanere isolati dalla realtà, è dunque giunta l'ora di affrontare, o almeno impostare nelle linee generali, la risoluzione di problemi in cui l'incognita non si limita ad essere definita in un banale intervallo monodimensionale $[a, b]$ ⁽³⁸⁾. L'unica equazione di cui avremo l'occasione di occuparci, ma che è presente in innumerevoli circostanze, è la seguente:

$$(4.4.1) \quad -\Delta u + \mu u = f \quad \text{in } \Omega$$

dove Ω è un insieme regolare di \mathbf{R}^2 (ovvero \mathbf{R}^3) e $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ è l'*operatore di Laplace* ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ nel caso tridimensionale). Le funzioni $\mu \geq 0$ ed f sono assegnate in Ω e si supporrà che siano regolari. L'equazione è di tipo *ellittico* e costituisce una generalizzazione di (3.2.5). Perchè (4.4.1) abbia un'unica soluzione, bisogna assegnare delle condizioni al contorno. Per semplicità, imporrò che u sia nulla sulla frontiera $\partial\Omega$ di Ω . Ciò basta in

⁽³⁸⁾ Oramai, quasi nessun problema monodimensionale è in grado di opporre resistenza, per tempi lunghi, ad un buon programmatore munito di una macchina di medie prestazioni. Questo vanifica un po' lo sforzo di mettere a confronto vari algoritmi, nel tentativo di minimizzare i costi. Tutto viene rimesso in discussione quando si parla di problemi tridimensionali, dove certe applicazioni si lasciano difficilmente intaccare anche dai più potenti sistemi di calcolo. Ci auguriamo che il lettore non cada nello sconforto, avendogli rivelato così brutalmente che il materiale finora presentato non è che una sequela di esemplificazioni di puro interesse accademico, ben lontane dal soddisfare le reali esigenze. Ci si può consolare rilevando che una buona esperienza acquisita sui modelli di base non può che ripercuotersi positivamente, e spesso in maniera sostanziale, sull'analisi di casi più impegnativi.

genere a garantire esistenza ed unicità di u . Il problema così completato viene detto di *Poisson*.

Similmente a quanto fatto nel paragrafo 3.2, ha convenienza riscrivere (4.4.1) in forma variazionale. Discuteremo solo il caso bidimensionale, lasciando al lettore le facili generalizzazioni al caso tridimensionale. Nella ricerca del minimo del funzionale Lagrangiano $\frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\vec{\nabla} w|^2 + \mu w^2) dx dy - \int_{\Omega} f w dx dy$ (si veda (3.2.1)), si perviene all'insieme di equazioni:

$$(4.4.2) \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \psi \, dx dy + \int_{\Omega} \mu u \psi \, dx dy = \int_{\Omega} f \psi \, dx dy$$

al variare della funzione test ψ , nulla alla frontiera di $\partial\Omega$. Il vettore $\vec{\nabla} w = \left(\frac{\partial}{\partial x} w, \frac{\partial}{\partial y} w \right)$ indica il gradiente di w e il simbolo \cdot indica il prodotto scalare di \mathbf{R}^2 . L'analogia con (4.4.1) si ottiene immediatamente in virtù delle *formule di Green* che ci permettono di dedurre che:

$$(4.4.3) \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} \psi \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \psi \, ds - \int_{\Omega} \Delta u \, \psi \, dx dy$$

Il primo termine del secondo membro di (4.4.3) è un integrale curvilineo nel quale $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} u$ indica la derivata nella direzione normale \vec{n} esterna ad Ω . Questo termine è in effetti nullo, se ipotizziamo che ψ sia nulla su $\partial\Omega$.

Lo studio teorico di (4.4.2) viene effettuato ambientando la soluzione u e le funzioni test ψ in un opportuno spazio funzionale completo \mathbf{X} , che non abbiamo interesse qui a descrivere. Il vantaggio della nuova impostazione, già sperimentato nel paragrafo 3.3, è quello di permettere l'approssimazione della soluzione mediante il metodo di Galerkin. Si sceglie perciò uno spazio $\mathbf{X}_d \subset \mathbf{X}$ di dimensione finita d e, al posto di u , si cerca una funzione $u_d \in \mathbf{X}_d$ che soddisfi (4.4.2) per tutte e sole le funzioni ψ appartenenti a \mathbf{X}_d . Dal problema differenziale si passa così ad un sistema lineare in dimensione finita.

Il metodo degli elementi finiti è il primo caso che analizzeremo. Semplificheremo la trattazione supponendo che Ω sia un quadrato, anche se risulterà chiaro come intervenire in casi più generali. Innanzitutto, si considera una *triangolazione conforme* di Ω , tale quella mostrata ad esempio in figura 1.7.2. Lo spazio \mathbf{X}_d sarà costituito dalle funzioni continue di Ω , che si annullano su $\partial\Omega$ e che, su ciascun triangolo, coincidono con un polinomio di primo grado nelle variabili x e y (cioè una combinazione lineare dei monomi 1, x ed y). Si realizza facilmente che d è pari al numero dei *vertici* (contati con molteplicità

uno) della triangolazione, dopo aver escluso quelli che giacciono sulla frontiera di Ω . Convienne poi numerare i vertici e predisporre una base $\{\phi_k\}_{k=1,\dots,d}$ di \mathbf{X}_d , dove ogni ϕ_k vale 1 sul k -esimo vertice e 0 in tutti gli altri. Prendendo spunto da (3.3.2) si ottiene un sistema lineare in cui le incognite sono i valori di u_d nei vertici (che verranno ad essere delle approssimazioni di u negli stessi vertici), i termini noti sono $\int_{\Omega} f\phi_i dx dy$ $i = 1, \dots, d$, e gli elementi della matrice sono $\int_{\Omega} (\vec{\nabla}\phi_j \cdot \vec{\nabla}\phi_i) dx dy + \int_{\Omega} \mu\phi_j\phi_i dx dy$ con i e j che variano fra 1 e d . Il calcolo del gradiente delle funzioni di base è molto facile, visto che in ogni triangolo queste coincidono con il loro piano tangente (si noti inoltre che l'insieme in cui ϕ_k non è differenziabile ha misura nulla in \mathbf{R}^2). Con ulteriori semplificazioni discuteremo alcuni casi emblematici.

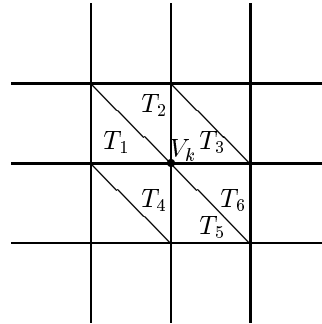
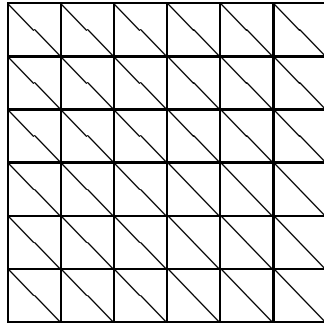


Figura 4.4.1- *Triangolazione regolare di Ω .* **Figura 4.4.2-** *Supporto E_k di ϕ_k .*

Prendiamo $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ e $\mu = 0$. Per $n \geq 2$, consideriamo i punti della forma $(hk_1, hk_2) \in \Omega$ con $h = 1/n$ e con k_1 e k_2 che variano fra 1 ed $n - 1$. Con essi costruiamo una triangolazione di Ω , come mostrato in figura 4.4.1, ordinando i vertici nel seguente modo: $V_k = (hk_1, hk_2)$ con $k = k_1 + (n - 1)(k_2 - 1)$ (k varia quindi fra 1 e $d = (n - 1)^2$). Ogni elemento ϕ_k della base di \mathbf{X}_d è nullo al di fuori dell'esagono E_k (figura 4.4.2), costituito

dall'unione dei triangoli T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 e T_6 . E' immediato verificare che

$$(4.4.4) \quad \vec{\nabla}\phi_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{h}, 0\right) & \text{in } T_1 & \left(0, -\frac{1}{h}\right) & \text{in } T_2 \\ \left(-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}\right) & \text{in } T_3 & \left(\frac{1}{h}, \frac{1}{h}\right) & \text{in } T_4 \\ \left(0, \frac{1}{h}\right) & \text{in } T_5 & \left(-\frac{1}{h}, 0\right) & \text{in } T_6 \end{cases}$$

da cui scaturisce che

$$(4.4.5) \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla}\phi_j \cdot \vec{\nabla}\phi_i \, dxdy = \int_{E_j \cap E_i} \vec{\nabla}\phi_j \cdot \vec{\nabla}\phi_i \, dxdy = \begin{cases} 4 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } |j - i| = 1 \text{ oppure } |j - i| = n - 1 \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

Pertanto, la matrice del sistema lineare ha solo 5 diagonali (non tutte contigue) diverse da zero. Per $n = 6$, corrispondente a $d = 25$, la struttura di detta matrice appare in figura 4.4.3.

Come nel caso monodimensionale (si veda (3.4.8)), se si sostituiscono le derivate parziali $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ con rapporti incrementali, si ottiene il metodo di approssimazione delle differenze finite:

$$(4.4.6) \quad -\frac{\zeta_{i+1,j} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i-1,j}}{h^2} - \frac{\zeta_{i,j+1} - 2\zeta_{i,j} + \zeta_{i,j-1}}{h^2} = f(hi, hj)$$

dove i e j variano tra 1 ed $n-1$. Dopo aver ordinato le incognite $\zeta_{i,j}$ rispettando la numerazione indotta dalla formula $i + (n-1)(j-1)$, è interessante notare che la matrice che scaturisce da (4.4.6) eguaglia la matrice del metodo degli elementi finiti, a meno del fattore h^{-2} . Del resto si era osservata una simile attinenza anche nel caso monodimensionale.

Evitiamo di produrre delle stime dell'errore $\|u - u_d\|_{\mathbf{X}}$, la dimostrazione delle quali, in fin dei conti, si basa sugli stessi principi validi nel caso monodimensionale. La teoria utilizza delle stime sull'errore $\inf_{\psi \in \mathbf{X}_d} \|u - \psi\|_{\mathbf{X}}$, la cui rapidità di decadimento per $h \rightarrow 0$, che in questo caso è proporzionale ad h , traduce con quanta accuratezza una funzione di \mathbf{X} possa essere approssimata con elementi di \mathbf{X}_d .

trariamente grande, fino ad arrivare ad implementare metodi di tipo spettrale. La *griglia* di figura 1.7.1 si presta molto bene ad applicazioni in tale direzione.

L'innegabile vantaggio nell'approcciare (4.4.1) mediante (4.4.2), consiste nella facilità di estendere le tecniche di approssimazione a triangolazioni definite su domini di forma assai generale ⁽³⁹⁾, laddove le differenze finite richiedono invece un grande sforzo di adattamento. Formalmente, i passaggi da seguire per ottenere il sistema lineare rimangono invariati. Numerosi sono i codici di calcolo disponibili sul mercato. In genere, essi attivano nell'ordine le seguenti procedure. Si genera la triangolazione in modo che i suoi elementi siano di diametro inferiore ad una quantità prefissata h , e il più possibili assomiglianti a triangoli equilateri ⁽⁴⁰⁾. Si calcolano successivamente i coefficienti della matrice. E' prassi organizzare il lavoro posizionandosi su ciascun triangolo T e computando le quantità $\int_T (\vec{\nabla} \phi_j \cdot \vec{\nabla} \phi_i) dx dy + \int_T \mu \phi_j \phi_i dx dy$, dopo aver scelto in tutti i modi possibili ϕ_i e ϕ_j tra quelle coppie di funzioni di base che sono entrambe non nulle su T . Si esamina poi ciascun nodo e, in base ai triangoli a cui esso appartiene, si somma un numero congruo di contributi, ottenendo così i coefficienti. Sorte analoga spetta al vettore dei termini noti.

Per rendere ancora più veloci queste operazioni, si considera la trasformazione affine (trasformazione lineare con translazione) che porta T nel triangolo \tilde{T} di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Le funzioni di base ristrette a T e trasportate, mediante cambio di variabile su \tilde{T} , assumono un numero molto ristretto di configurazioni dette *shape functions*, la cui forma non dipende da T . La mole di conti si riduce considerevolmente notando che è sufficiente effettuare le integrazioni su \tilde{T} , in quanto \int_T si ottiene poi da $\int_{\tilde{T}}$ moltiplicando per il doppio dell'area di T (tale è il valore costante del determinante della matrice Jacobiana della trasformazione da \tilde{T} a T). Per ultimo, si procede come prima all'assemblaggio dei vari contributi per il calcolo finale dei coefficienti della matrice.

Mettendo insieme quanto detto in questo paragrafo e nel paragrafo 4.1, non dovrebbe essere difficile per il lettore elaborare delle tecniche di discretiz-

⁽³⁹⁾ Uno dei motivi del grande successo del metodo degli elementi finiti.

⁽⁴⁰⁾ La rapidità di convergenza del metodo dipende dal rapporto tra la circonferenza circoscritta ad ogni triangolo e quella inscritta, e deteriora al crescere di tale rapporto, che va mantenuto quindi il più piccolo possibile.

zazione per l'equazione del calore:

$$(4.4.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) - \Delta u(x, y, t) = f(x, y, t) \quad (x, y) \in \Omega \quad t \in]0, T]$$

con condizioni al contorno nulle per ogni $t \in [0, T]$, e con la condizione iniziale $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$.

Grandissima parte dei testi introduttivi al metodo degli elementi finiti presenta applicazioni relative alla meccanica dei solidi (torsione elastica di barre, piastre e gusci sotto carico, ecc.), che, frequentemente, portano ad equazioni ellittiche del quarto ordine. In questo contesto, particolare attenzione viene data allo studio delle singolarità della soluzione sviluppantisi nell'intorno di punti angolosi, al fine di prevenire deformazioni troppo pronunciate o fratture delle strutture in esame.

Per il trattamento di problemi definiti su domini tridimensionali valgono a grandi linee le stesse considerazioni sinora fatte. Nel più dei casi, la suddivisione del dominio viene effettuata attraverso tetraedri (si consideri l'esercizio 16 del paragrafo 4.7). L'attuazione pratica di un codice di calcolo risulta tuttavia molto impegnativa e riservata a programmatori di provata esperienza. Si pensi, ad esempio, agli aspetti concernenti l'organizzazione e la gestione in memoria di vettori e matrici. Anche la scelta della tecnica risolutiva del sistema lineare risultante è un fattore importantissimo (e spesso il più oneroso). E' opportuno prendere delle decisioni prima di mettersi al lavoro, per evitare successivamente di pentirsi, e di ricorrere a poco eleganti rattoppi. Considereremo in parte questo aspetto nel capitolo cinque.

Infine, una materia da non sottovalutare nei problemi in tre dimensioni spaziali, è la visualizzazione di dati e risultati che, senza l'ausilio di opportuno *software*, può rivelarsi un compito arduo.

4.5 Equazioni integrali e metodo dei boundary elements

In questo paragrafo Ω sarà un aperto semplicemente connesso di \mathbf{R}^2 , con frontiera $\partial\Omega$ che individua una curva semplice, chiusa e regolare a tratti. Data una funzione g definita su $\partial\Omega$, indicheremo con $\int_{\partial\Omega} g ds$ il suo integrale curvilineo, da valutarsi attraverso una parametrizzazione della frontiera di Ω . Se $\vec{x} \in \mathbf{R}^2$ appartiene a $\partial\Omega$, si denoterà con $\vec{n}(\vec{x})$ la normale esterna (individuabile

quasi ovunque) a $\partial\Omega$ nel punto \vec{x} . Detto questo, ci poniamo il problema della determinazione di soluzioni $v : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ della seguente equazione integrale alla *Fredholm*:

$$(4.5.1) \quad v(\vec{x}) - \lambda \int_{\partial\Omega} K(\vec{x}, \vec{y})v(\vec{y}) ds = g(\vec{x})$$

dove $\lambda \in \mathbf{R}$ e $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ sono assegnati e l'integrazione è svolta rispetto alla variabile $\vec{y} \in \partial\Omega$. La funzione $K : \partial\Omega \times \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è il cosiddetto *nucleo* e può variare a seconda delle circostanze, influenzando in modo sostanziale sulla difficoltà del problema. Siccome il nucleo può spesso risultare *singolare* (ad esempio quando $\vec{x} = \vec{y}$), l'integrale in (4.5.1) si intende ai *valori principali* ⁽⁴¹⁾. In casi frequenti la soluzione di (4.5.1) è determinata a meno di una costante, per cui, si usa imporre l'ulteriore condizione $\int_{\partial\Omega} v ds = 0$. Spesso, si chiede anche che g soddisfi una qualche condizione di compatibilità. La letteratura sull'argomento delle equazioni integrali è vasta ed esistono risultati teorici che caratterizzano la soluzione v per un'ampia varietà di nuclei K .

La *teoria del potenziale* permette di stabilire il nesso tra talune equazioni integrali ed alcune equazioni differenziali alle derivate parziali. Indicheremo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e con $\|\cdot\|$ rispettivamente il prodotto scalare e la norma in \mathbf{R}^2 . Si definisce prima il *nucleo di Poisson* come $K(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{n}(\vec{y}) \rangle / \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$. Sia poi v la soluzione di

$$(4.5.2) \quad v(\vec{x}) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial\Omega} K(\vec{x}, \vec{y})v(\vec{y}) ds = 2g(\vec{x})$$

Si ponga infine

$$(4.5.3) \quad u(\vec{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{n}(\vec{y}) \rangle}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^2} v(\vec{y}) ds$$

dove questa volta $\vec{x} \in \Omega$.

Allora, la funzione di due variabili $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione *armonica*, cioè soddisfa $\Delta u = 0$ (si prenda $\mu = 0$ e $f = 0$ in (4.4.1)). Inoltre, la restrizione di u su $\partial\Omega$ coincide con g . La caratterizzazione fornita da (4.5.3) permette la valutazione diretta di u in ogni singolo punto $\vec{x} \in \Omega$, una volta che sia nota la soluzione v di (4.5.2).

⁽⁴¹⁾ Ricordiamo che, in questo modo, l'integrale $\int_{-a}^b t^{-1} dt$, con $a > 0$ e $b > 0$, si calcola come: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-a}^{-\epsilon} t^{-1} dt + \int_{\epsilon}^b t^{-1} dt \right) = \log(b/a)$.

Oltre a fornire nuove prospettive per l'esame teorico del problema (4.4.1), le due equazioni (4.5.2) e (4.5.3) aprono nuove strade per quanto riguarda l'approccio di tipo numerico. Nel metodo dei *boundary elements* la frontiera $\partial\Omega$ viene suddivisa mediante un numero finito di nodi \vec{x}_k $k = 1, \dots, d$. Si costruisce con detti nodi un poligono Σ_d con lati L_k $k = 1, \dots, d$ ⁽⁴²⁾. Si cercano poi i valori σ_k $k = 1, \dots, d$, soddisfacenti

$$(4.5.4) \quad \sigma_k - \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^d \sigma_j \int_{L_j} K(\vec{x}_k, \vec{y}) ds = 2g(\vec{x}_k) \quad k = 1, \dots, d$$

Le d equazioni in (4.5.4) sono il risultato dell'applicazione di una rudimentale formula di quadratura all'integrale in (4.5.2), conseguente al fatto di aver sostituito a v su $\partial\Omega$ un'opportuna funzione costante a tratti su Σ_d . Il calcolo degli integrali lungo ciascun L_j può essere intrapreso per via analitica senza grandi impedimenti. Una volta risolto il sistema lineare che deriva da (4.5.4), si affronta il calcolo approssimato di u in un punto assegnato $\vec{x} \in \Omega$:

$$(4.5.5) \quad u(\vec{x}) \approx -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^d \sigma_j \int_{L_j} \frac{\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{n}(\vec{y}) \rangle}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^2} ds$$

senza dover ricorrere ad un'approssimazione globale di u su tutto Ω . Operando solo con incognite riferite alla frontiera $\partial\Omega$ si riducono drasticamente i costi. L'utilizzo del metodo dei *boundary elements* da luogo ad opinioni controverse: i suoi sostenitori pubblicizzano eccellenti prestazioni a basso prezzo; i detrattori osservano invece che è difficilmente estendibile al caso in cui f non sia nulla in (4.4.1), ma soprattutto ad altre equazioni differenziali di tipo ellittico.

Rimanendo nell'ambito delle equazioni integrali non possiamo non citare la seguente equazione con nucleo alla *Cauchy*:

$$(4.5.6) \quad v(\theta) - \lambda \int_a^b \frac{v(\eta) d\eta}{\theta - \eta} = g(\theta) \quad \theta \in]a, b[$$

ben conosciuta in Aerodinamica e molto affine a (4.5.2). Non ci dilunghiamo oltre, ma ci limitiamo a sottoporre al lettore due eleganti relazioni:

$$(4.5.7) \quad \int_{-1}^1 \frac{T_n(\eta)}{\eta - \theta} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\pi}{n} T'_n(\theta) \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

⁽⁴²⁾ In versioni similari, il poligono Σ_d è fatto in modo che ciascun lato L_k contenga \vec{x}_k al suo interno.

$$(4.5.8) \quad \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{T_n(\theta)}{\theta - x_j^{(n)}} = \frac{\pi}{n} T_n'(\theta) \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

essendo T_n il polinomio di Chebyshev di grado n , definito nel paragrafo 1.5, e avendo indicato con $x_j^{(n)}$ $j = 1, \dots, n$, i suoi zeri. Tenendo anche presente (1.5.7), ci sono abbastanza elementi per proporre tecniche numeriche per il problema (4.5.6) basate sul metodo di collocazione.

4.6 Miscellanea

Un'equazione alle derivate parziali, ben nota in molte applicazioni, è la seguente versione non lineare dell'equazione di Schrödinger:

$$(4.6.1) \quad i \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + |u(x, t)|^2 u(x, t) = 0 \quad x \in]a, b[, \quad t \in]0, T]$$

dove i è l'unità immaginaria e l'incognita u assume valori complessi (si intende che il valore reale $|u|$ è il modulo di u). Essa assomiglia all'equazione del calore, ma, dopo aver decomposto $u = v + iw$ nella sua parte reale v ed immaginaria w , si ottiene il sistema non lineare di equazioni

$$(4.6.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (v^2 + w^2)w \\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (v^2 + w^2)v \end{cases}$$

che viene catalogato fra quelli di tipo iperbolico, e nel quale si denota assenza di dissipatività (si veda l'esercizio 18 del paragrafo 4.7). La sperimentazione di tecniche numeriche per l'approssimazione della soluzione u di (4.6.1) è un utile esercizio per raffinare le proprie conoscenze. Consigliamo pertanto al lettore di cimentarsi con suddetta equazione.

In molti problemi, noti come problemi di *frontiera libera*, il dominio dove è definita l'incognita u non è noto a priori, ma dipende dall'evolversi di u stessa nel tempo. Si prenda ad esempio il caso di un cubetto di ghiaccio G immerso in un recipiente R di acqua tiepida. La temperatura (in gradi Celsius) su G è nulla, e su $\Omega = R - G$ segue le leggi di diffusione del calore (si producono anche moti di tipo convettivo che si possono opportunamente modellizzare).

In conseguenza al fatto che il ghiaccio si scioglie, il dominio Ω aumenta di proporzioni col passare del tempo, ad una velocità che dipende dal *gradiente* di temperatura (e quindi da u) sul bordo di G . Anche i movimenti ondosi sulla superficie di un bacino idrico danno luogo ad una frontiera libera.

In altri problemi, il dominio di u è un'incognita che va determinata in modo da ottimizzare certe altre variabili dipendenti da u . I profili alari, ad esempio, devono essere congegnati in modo da assicurare un sostentamento adeguato con una minima resistenza all'aria. Nella regione Ω esterna all'ala, la cui frontiera è da individuare, valgono le equazioni che regolano i fenomeni della dinamica dei fluidi.

Particolare successo in campo computazionale hanno i metodi di *decomposizione dei domini*, attraverso i quali il problema differenziale, definito sul dominio Ω , viene trasformato in una successione di problemi analoghi definiti su un numero finito di sottodomini Ω_m tali che $\cup_m \bar{\Omega}_m = \bar{\Omega}$, avendo denotato con $\bar{\Omega}$ la chiusura di Ω . A seconda dei casi, l'intersezione tra insiemi Ω_m contigui può avere misura nulla o maggiore di zero. Le soluzioni sugli insiemi Ω_m sono soggette a condizioni che le raccordano fra loro, in modo da permettere l'individuazione di un'unica soluzione su tutto Ω . Inizialmente sviluppati per trattare numericamente i sistemi lineari di grandi proporzioni (così estesi da non rendere possibile l'accesso nella memoria centrale del calcolatore di tutta la matrice, e richiedendo quindi di sottometterla a pezzi), detti metodi hanno trovato via via diversi sbocchi, giustificando appieno la loro adozione in numerose altre circostanze. Sottolineiamo ad esempio il caso in cui si vogliono usare tecniche differenti per l'approssimazione della soluzione in diverse parti del dominio. Se Ω ha inoltre una forma assai complicata, certe decomposizioni si desumono in maniera molto naturale.

Una tecnica in voga in certi ambienti della Fisica Matematica è quella degli *automi cellulari*, che trova prevalente applicazione in problemi di evoluzione in dinamica dei fluidi o delle popolazioni. Il dominio viene decomposto in *celle* alle quali vengono attribuite proprietà fisiche e che interagiscono fra loro tramite regole preassegnate basate ad esempio su leggi di conservazione (massa, momenti, energia). Ad istanti temporali consecutivi le celle scambiano informazioni fra loro e modificano il loro stato, simulando l'evento fisico. Più sono le variabili attribuite ad ogni cella e con più coerenza le leggi della Fisica vengono rispettate durante la fase di aggiornamento, maggiore sarà di conseguenza l'attendibilità

dei risultati. Affinchè ci sia attinenza con il modello reale bisogna che le celle siano minuscole e, pertanto, molto numerose. In effetti tali procedure vengono usualmente implementate su macchine che dispongono di un numero esagerato di processori (dell'ordine di 10^6), ciascuno sufficientemente elaborato da permettere operazioni su una o più celle. Un'analisi teorica di consistenza viene fatta mandando a zero il diametro delle celle e studiando le equazioni differenziali alle derivate parziali che ne derivano ⁽⁴³⁾.

Le leggi che regolano la dinamica delle celle possono variare nel tempo, e, addirittura, essere apprese e migliorate dalle celle stesse durante il loro evolversi. Si parla in tal caso di *reti neurali*.

4.7 Qualche esercizio

1. Sia u una funzione derivabile in $]a, b[$ con $u(a) = 0$. Dopo aver osservato che, in conseguenza della disuguaglianza di Schwarz, si ha $|u(x)| = \left| \int_a^x u'(t) dt \right| \leq \sqrt{b-a} \|u'\|_{L^2(a,b)}$, si dimostri che: $\|u\|_{L^2(a,b)} \leq (b-a) \|u'\|_{L^2(a,b)}$.
2. Sia $f = 0$ in (4.1.1) e $\alpha = \beta = 0$ in (4.1.2). Si moltiplichi l'equazione (4.1.1) per $u(x, t)$ e si integri in $[a, b]$ rispetto alla variabile x . Posto $E(t) = \|u(\cdot, t)\|_{L^2(a,b)}^2$ $t > 0$, tramite integrazione per parti, provare che $E'(t) < 0$, da cui dedurre successivamente che $E(t) < \|u_0\|_{L^2(a,b)}^2 \forall t > 0$. Sfruttando l'esercizio 1, stabilire che $E'(t) < -E(t)/(b-a)$, da cui infine intuire che $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$.
3. Prendere in considerazione diversi metodi, sia di tipo esplicito che implicito, per la discretizzazione del sistema differenziale (4.1.5) rispetto alla variabile t . Al variare dello spazio \mathbf{X}_d e della relativa base, tra gli esempi già presi in esame nei paragrafi 3.4 e 3.5, disegnare gli *stencils* corrispondenti.

⁽⁴³⁾ Contrariamente a quanto è accaduto fino ad ora, nel caso degli automi cellulari, la stesura dell'algoritmo numerico è anteriore alla formulazione del modello differenziale. Ciò non deve sorprendere. E' più contraddittorio l'approccio classico, nel quale si applica un procedimento finito per ottenere informazioni sulla soluzione di un'equazione differenziale, la quale, il più delle volte, proviene già da passaggi al limite di entità nel discreto (ad esempio di rapporti incrementali).

4. Rammentando i risultati dei paragrafi 2.1 e 2.5, e l'esercizio 8 del paragrafo 3.9, studiare la convergenza del metodo (4.1.8).
5. Si verifichi che, quando $f = 0$, il metodo di Crank-Nicolson (4.1.10) fornisce la disuguaglianza $E_k < E_{k-1} \quad \forall k \geq 1$, dove $E_k = \left(\sum_{j=1}^d \zeta_{j,k}^2 \right)^{1/2}$. Per la dimostrazione conviene rifarsi a (3.4.11), dopo aver moltiplicato l'espressione in (4.1.10) per $(u_{j,k} + u_{j,k-1})$ e aver sommato rispetto all'indice j .
6. Nel caso in cui \mathbf{X}_d sia lo spazio delle funzioni continue e lineari a tratti, si provi che gli autovalori della matrice in (4.2.4) hanno parte reale nulla. Può essere d'aiuto risolvere prima l'esercizio 16 del paragrafo 3.9. Successivamente si definisca $E(t) = \langle A_d \vec{x}(t), \vec{x}(t) \rangle + \langle B_d^{-1} \vec{y}(t), \vec{y}(t) \rangle \quad \forall t \geq 0$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare in \mathbf{R}^d . Si verifichi che $E(t)$ è una norma in \mathbf{R}^{2d} . Inoltre, sfruttando l'equazione (4.2.4) e la simmetria delle matrici A_d e B_d , si deduca che $\frac{d}{dt} E(t) = 0 \quad \forall t > 0$, ovvero che E è costante. Applicare infine il metodo dei trapezi per discretizzare (4.2.4) rispetto alla variabile t . Con trucchi simili a quelli escogitati sopra, scoprire che, valutando i vettori iterati in un'opportuna norma, quest'ultima si mantiene costante.
7. Si può sviluppare un'analisi dell'algoritmi (4.2.8), (4.2.10), (4.2.11), cercando soluzioni a valori complessi della forma $\zeta_{j,k} = \rho^k e^{i\theta j}$ con $\rho, \theta \in \mathbf{R}$. Una sorta di stabilità alla Von Neumann (si veda (2.4.12)) si realizza osservando che esiste $\gamma > 0$ tale per cui: $|\rho| \leq 1 + \gamma h_t$, indipendentemente da θ . Per una stabilità di tipo asintotico ($T \rightarrow +\infty$ e h_t fissato), si richiede che $|\rho| \leq 1$, riconducendosi alla disuguaglianza (4.2.9). Si esamini in modo rigoroso quanto asserito qui sopra.
8. Si analizzi il comportamento delle soluzioni delle equazioni $\frac{\partial}{\partial t} v = -c \frac{\partial}{\partial x} v$, $\frac{\partial}{\partial t} w = c \frac{\partial}{\partial x} w$, munite rispettivamente delle condizioni al contorno *riflettenti*: $v(a, t) = w(a, t)$ e $w(b, t) = v(b, t)$. Si consideri anche il caso *dissipativo* in cui $v(a, t) = Lw(a, t)$ e $w(b, t) = Rv(b, t)$, dove L ed R sono numeri reali con $|LR| < 1$.
9. Costatare che, adottando la formula (4.3.3) per il calcolo del termine non lineare nella discretizzazione di (4.3.1), si ricava una variante del metodo (4.3.2), dove ϵ viene sostituito dalla *viscosità artificiale* $\epsilon + \frac{1}{2} h_x |\zeta_{j,k-1}|$. L'amplificazione automatica del termine di diffusione che ne risulta, consente una scelta non restrittiva dei parametri h_t ed h_x ,

anche se ciò implica uno smussamento non richiesto dei fronti d'onda nell'approssimazione. Il trucco funziona anche quando $\epsilon = 0$. In tale circostanza, rimpiazzando ϵ in (4.3.2) con $\frac{1}{2}h_t|\zeta_{j,k-1}|$, si ricava una tecnica a viscosità artificiale nota come metodo di *Lax-Wendroff*.

10. Si approssimi la soluzione di (3.6.5) mediante: $-\epsilon(\zeta_{i+1}^{(n)} - 2\zeta_i^{(n)} + \zeta_{i-1}^{(n)})/h^2 + (\zeta_i^{(n)} - \zeta_{i-1}^{(n)})/h = 1 \quad i = 1, \dots, n-1$. Si osservi poi che $\zeta_i^{(n)} = -hi + (\chi^i - 1)(\chi^n - 1)$ con $\chi = 1 + h/\epsilon$, deducendo dunque, a differenza di quanto accadeva nell'esercizio 14 del paragrafo 3.9, che la soluzione approssimata non oscilla, qualsiasi sia h . Tenuto conto che la soluzione di (3.6.5) può essere vista come lo stato stazionario di un'equazione alle derivate parziali dipendente dal tempo, commentare il risultato, basandosi anche su quanto è scaturito dall'esercizio 9 qui sopra.
11. Sviluppare degli algoritmi numerici funzionanti per l'approssimazione della soluzione dell'equazione: $\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = x \frac{\partial}{\partial x}u(x, t) \quad x \in]-1, 1[$, non provvista di condizioni al contorno. Ripetere l'esperimento nel caso dell'equazione: $\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = -x \frac{\partial}{\partial x}u(x, t) \quad x \in]-1, 1[$, con $u(\pm 1, t) = 0$ per $t > 0$.
12. Verificare l'equivalenza di (4.4.1) e (4.4.2) nell'ipotesi che u ed f siano sufficientemente regolari e $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ con $\psi = 0$ su $\partial\Omega$.
13. Dopo aver controllato (4.4.4), verificare (4.4.5), ricordando che l'insieme $E_j \cap E_i$ o a misura nulla o può essere decomposto in un numero massimo di sei triangoli del tipo illustrato in figura 4.4.2.
14. Si disegni lo *stencil* relativo allo schema (4.4.6).
15. Dimostrare, tenendo presente (3.4.11), che la matrice di figura 4.4.3 è definita positiva. Con l'ausilio di (3.7.6) determinarne gli autovalori.
16. Dividere un cubo Ω in cubi di dimensioni più piccole che verranno successivamente suddivisi in sei tetraedri ciascuno. Preso lo spazio \mathbf{X}_d delle funzioni continue di tre variabili che si annullano su $\partial\Omega$ e che coincidono con un polinomio di primo grado su ciascun tetraedro, individuare la matrice $\int_{\Omega} (\vec{\nabla}\phi_j \cdot \vec{\nabla}\phi_i) dx dy dz$, dove $\{\phi_k\}_{k=1, \dots, d}$ è la base Lagrangiana di funzioni di \mathbf{X}_d relativamente ai vertici dei cubetti.
17. Dimostrare (4.5.8) sviluppando il polinomio T'_n , di grado $n - 1$, nella base di Lagrange relativa ai nodi $x_j^{(n)} \quad j = 1, \dots, n$.
18. Dopo aver preventivamente moltiplicato la prima equazione in (4.6.2) per v e la seconda per w , si integri ciascuna di esse rispetto alla variabile

x . In questo modo, supposto che $u(a, t) = u(b, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, si mostri che $\|u\|_{L^2(a,b)}^2 = \int_a^b |u|^2 dx = \int_a^b (v^2 + w^2) dx$ è costante rispetto alla variabile t . Si applichi il metodo dei trapezi per la discretizzazione di (4.6.2) rispetto alla variabile t e si dimostri che pure le approssimazioni così ottenute agli istanti t_k , hanno norma in $L^2(a, b)$ costante rispetto a $k \in \mathbf{N}$.

4.8 Bibliografia di questo capitolo

Completiamo la lista del paragrafo 3.10 con altri titoli di libri concernenti la discretizzazione di equazioni alle derivate parziali, scelti fra quelli che non presuppongono conoscenze già troppo avanzate sull'argomento. Per un esame degli aspetti teorici sulle leggi di conservazione, un buon trattato è [v].

- [a] Akin J., *Finite Element Analysis for Undergraduates*, Academic Press, Londra, 1986.
- [b] Bathe K. J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1982.
- [c] Bernardi C., Maday Y., *Approximations Spectrales de Problèmes aux Limites Elliptiques*, Mathématiques & Applications 10, Springer, Parigi, 1992.
- [d] Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, New York, 1988.
- [e] Ciarlet P. G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [f] Davies A. J., *The Finite Element Method: A First Approach*, Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [g] Forsythe G. E., Wasow W. R., *Finite Difference Method for Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1960.
- [h] Funaro D., *Spectral Elements for Transport-Dominated Equations*, LNCSE n.1, Springer, Heidelberg, 1997.
- [i] Godounov S., Riabenki V., *Schémas aux Différences*, Edizioni MIR, Mosca, Traduzione dal russo, 1977.
- [l] Hildebrand F. B., *Finite-Difference Equations and Simulations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1968.

-
- [m] Hughes T. J. R., *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1987.
- [n] Johnson C., *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [o] Meis T., Markowitz U., *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1981.
- [p] Morton K. W., Mayers D. F., *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [q] Ottosen N. S., Petersson H., *Introduction to the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs NJ, 1992.
- [r] Quarteroni A., Valli A., *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, Heidelberg, 1984.
- [s] Raviart P. A., Thomas J. M., *Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles*, Masson, Parigi, 1983.
- [t] Schwarz H. R., *Finite Element Methods*, Academic Press, Londra, 1988.
- [u] Smith G. D., *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, Oxford University Press, Londra, 1969.
- [v] Smoller J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer, New York, 1983.
- [z] Szabó B., Babuška I., *Introduction to Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1990.